N° Archives CNRS :
A.O. 12.454

THESE

présentée à

L' UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

pour l'obtention du

DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Spécialité : MATHEMATIQUES

Mention : INFORMATIQUE

Par MONIQUE BECKER - JOUVINROUX

Sujet de la thèse : VALIDITE DES SIMULATIONS DE FILES D'ATTENTE

Soutenue le 25 Juin 1976 devant la Commission composée de :

Président : M. R. FORTET

Rapporteur : M. J. ARSAC

Examinateurs : MM. R. FAURE - A. TORTRAT - J. VIGNES
C. MACCHI - E. GELENBE

N° Archives CNRS :
A.O. 12.454

THESE

présentée à

L' UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

pour l'obtention du

DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Spécialité : MATHEMATIQUES

Mention : INFORMATIQUE

Par MONIQUE BECKER - JOUVINROUX

Sujet de la thèse : VALIDITE DES SIMULATIONS DE FILES D'ATTENTE

Soutenue le 25 Juin 1976 devant la Commission composée de :

Président : M. R. FORTET

Rapporteur : M. J. ARSAC

Examinateurs : MM. R. FAURE - A. TORTRAT - J. VIGNES
C. MACCHI - E. GELENBE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je tiens à exprimer ma très grande reconnaissance envers Monsieur ARSAC et Monsieur FORTET qui ont dirigé conjointement mon travail, leurs idées et leurs critiques m'ont été indispensables. Monsieur ARSAC m'a proposé ce sujet particulièrement intéressant, et m'a donné tous les moyens nécessaires pour l'étudier. Monsieur FORTET m'a aidé à préciser le sujet, à faire le chapitre III notamment, et m'a aussi proposé le sujet du chapitre VI qui convenait particulièrement bien,permettant à la fois une étude mathématique et une simulation intéressante.

Je remercie Monsieur TORTRAT de m'avoir fait l'honneur d'appartenir à mon jury.

Je tiens à remercier Monsieur VIGNES de ses conseils de spécialiste des erreurs de troncature qui m'ont été particulièrement utiles pour le chapitre II.

Je tiens aussi à remercier vivement mon mari pour sa participation effective au travail et notamment aux calculs des chapitres II et VI.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur FAURE pour les critiques apportées manuscrit. Je le remercie vivement aussi de m'avoir permis au début de ma thèse de travailler dans l'équipe de Monsieur BOURGOIN à la RATP. Il a été de première importance pour moi de travailler avec une équipe qui faisait une simulation, grâce à l'aide de Monsieur DEKINDT j'ai pu acquérir une expérience des problèmes posés par les simulations. Si finalement pour l'exposé de la thèse ce travail n'a pas été utilisé, c'est seulement parce qu'il nous a semblé préférable d'un point de vue pédagogique d'utiliser un exemple plus simple.

Je remercie tout particulièrement C. MACCHI qui m'a aidé à préciser le plan de ma thèse, a suggérer les algorithmes étudiés dans la deuxième moitié du chapitre II et a dirigé le travail pour cette partie de la thèse.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Monsieur PICARD, qui m'a accueillie dans son équipe, encouragée en acceptant de juger mes travaux et en me faisant part de ses remarques.

Je remercie vivement Monsieur PARZEN qui en m'accueillant, pendant 6 mois, dans son laboratoire de statistique à Buffalo, m'a permis deme familiariser avec l'analyse spectrale et les schémas autoregressifs.

Je remercie Monsieur GELENBE,mon parrain de CNRS, qui a réecrit avec moi la première moitié du chapitre II et m'a permis de participer au séminaire de son équipe de recherche. Les exposés sur les nombres pseudo-aléatoires m'ont été particulièrement utiles pour le chapitre V. Cela a été surtout le cas de celui de Monsieur YOSHIHARU KURITA du National Research Laboratory of Metrology, à Tokyo.

Que Madame T. BLIAUX et Madame J.BAIER, trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour le travail impeccable de frappe du manuscrit, qu'elles ont effectué en un temps remarquablement court, malgré la difficulté de certaines formules.

P L A N

CHAPITRE I — Position du problème

CHAPITRE II — Erreurs de troncature

CHAPITRE III — Convergence de simulations

CHAPITRE IV — Synthèse : durée optimale

CHAPITRE V — Nombres aléatoires

CONCLUSION des 5 premiers chapitres.

CHAPITRE VI — Etude d'un réseau de Télé-informatique

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548114_0013

VALIDITE DES SIMULATIONS DE FILES D'ATTENTE

Cette thèse comporte une étude générale de l'ensemble des causes d'incertitude des simulations de processus stochastiques, et une étude théorique et par simulation d'un réseau de files d'attente à service constant et à capacité limitée.

Les problèmes de validation des simulations peuvent être classées en 4 groupes.

a) validité du modèle

b) établissement de la stationnarité, et convergence de l'estimateur.

c) influence du a l'arithmétique à précision limitée de la machine

d) validité des nombres pseudo-aléatoires.

L'expérience que j'ai des équipes qui font des simulations de processus très compliqués, m'a montré que les problèmes difficiles qu'elles rencontrent les amènent à considérer les erreurs liées au principe même des simulations, comme négligeables devant les autres causes d'incertitude liées à la validité du modèle : *Notre but est d'étudier les causes d'incertitude liées au principe même des simulations* (b), (c) et (d).

Chapitre I. Position du Problème :

Lors d'une revue des simulations, en particulier de files d'attente, les différentes causes d'incertitude sont présentées. Afin de prouver leur importance un exemple simple dont la théorie est connue est simulé : une file M/M/I. Il apparaît une différence considérable entre les résultats théoriques et les résultats obtenus par simulations, ces derniers étant divergents.

Chapitre II. Erreurs de troncature

Les nombres en machine n'ayant qu'un nombre fini de chiffres significatifs, une erreur est commise pour presque toutes les opérations effectuées par la machine. Cette erreur se propage dans la suite des calculs. C'est cette propagation de l'erreur qui est importante.

Les simulations effectuant nécessairement des moyennes temporelles d'un grand nombre de variables, un biais important est du au fait que la machine doit faire des additions algébriques de deux nombres dont l'un est très grand par rapport à l'autre, en valeur absolue.

Des évaluations précises du biais introduit par les erreurs de troncature dans l'estimation des moyennes de nombres a_n , sont faites sans faire d'hypothèse particulière pour l'algorithme classique comportant un nombre minimum d'opérations. D'autres algorithmes ont été proposés et testés. Le calcul précis du biais a été fait dans le cas ou les variables a_n ont une répartition uniforme. Dans chaque cas les résultats expérimentaux coïncident exactement avec les résultats des calculs statistiques .

Le principe de l'étude dans le cas où la machine travaillerait en arrondi serait le même.

A notre connaissance des études aussi précises de tels effets n'avaient pas été entreprises et l'étude que nous avons faite en montre non seulement l'importance mais montrent qu'il est possible de corriger les résultats en s'inspirant de l'évaluation du biais.

Il est bien clair que ce genre de travail doit être généralisé, notamment à d'autres répartitions des variables aléatoires pour les calculs pour lesquels nous ne l'avons pas encore fait. Celà nécessite de calculer la répartition des chiffres d'une variable aléatoire de répartition donnée. C'est là l'un de mes projets.

Chapitre III. Convergence des simulations

Une simulation est une expérience, si on en faisait une autre, on obtiendrait un autre résultat. Pour obtenir un résultat intéressant on peut faire un grand nombre de simulations indépendantes, en répartissant bien les valeurs initiales et les valeurs des paramètres. Mais lorsque le théorème ergodique s'applique on fait une seule simulation de longue durée. Il faut alors déterminer la durée nécessaire pour obtenir une précision donnée.

La théorie de Le Gall est présentée, les autres méthodes utilisées actuellement sont discutées (Séparation en blocs indépendants, analyse spectrale, utilisation des points de renouvellement, approximation par des schémas autorégressifs). Une détermination précise de l'intervalle de confiance est faite pour la simulation M/M/I.

Chapitre IV. Synthèse : durée optimale

L'estimateur théorique converge lorsque la durée de la simulation augmente, mais la valeur absolue du biais du aux troncatures est une fonction croissante de la durée de la simulation.

Il est démontré au chapitre IV qu'il faut étudier les variations d'une fonction précision qui est la somme du biais du aux troncatures et de l'intervalle de confiance de l'estimateur théorique.

L'existence d'une durée optimale pour la simulation et d'une précision optimale est démontrée en utilisant les calculs de biais effectués au chapitre II.

L'application est faite pour les simulations M/M/I.

Le calcul de la précision optimale permet une comparaison entre les différents algorithmes. Un théorème d'équivalence entre deux algorithmes est en particulier démontré.

L'apport essentiel de ce travail est la démonstration de l'importance des erreurs dues à la précision limitée de la machine et de l'existence d'une durée optimale pour la simulation.

Il reste encore beaucoup à faire dans le domaine du choix des algorithmes de calculs de moyenne temporelle.

Chapitre V. Nombres aléatoires

Une application particulièrement utile de cette théorie est la validation des tests de nombre pseudo-aléatoires, lorsque ceux-ci font intervenir des moyennes d'un grand ensemble de nombres flottants.

Cependant une étude critique des méthodes de génération et des tests des nombres pseudo-aléatoires nous a amené à conclure d'une part qu'aucun test ne peut valider aucune suite, d'autre part qu'il est préférable d'utiliser des suites de nombres dont l'étude intrinséque est possible.

Les chapitres II, III et IV avaient négligé l'influence des erreurs de troncature, une justification est donnée dans ce chapitre. Il apparaît notamment pour la simulation M/M/I que les nombres pseudo-aléatoires n'ont pas une grande influence sur les résultats de la simulation, et que leur effet est bien négligeable devant les effets étudiés aux chapitres précédents.

Chapitre VI. Etude d'un réseau de télé informatique

Une théorie originale est présentée pour la résolution d'un noeud d'un réseau comportant 14 jonctions entrantes, 14 jonctions sortantes, et 6 liaisons de sélection envoyant les paquets arrivant des jonctions entrantes, vers la jonction sortante à laquelle ils sont destinés. On fait l'étude lorsque le trafic est peu chargé ce qui justifie l'approximation qui consiste à supposer que les processus d'entrée à chaque niveau sont des processus de renouvellement. On fait aussi une hypothèse de discrétisation.

Le système est un système de files d'attente à capacité constante et à temps de service constant. On introduit un opérateur de projection permettant de passer des systèmes à capacité infinie à ceux à capacité finie.

Cette méthode semble pouvoir être d'un emploi très général et permet d'obtenir à moindre frais des résultats obtenus par d'autres auteurs après de laborieux calculs.

Il nous a été possible de trouver la solution stationnaire du système étudié. La résolution numérique n'est possible que par des itérations sur ordinateur, mais nous avons pu proposer des solutions approchées initiales de qualité satisfaisante. Il est sans doute possible de représenter ce système de télé-informatique par des modèles physiques plus perfectionnés, mais le principe de la solution restera le même. J'envisage dans l'avenir de systématiser l'emploi de telles méthodes. Les systèmes à capacité finie ont été jusqu'à présent assez peu étudiés.

La nécessité d'une simulation est évidente pour valider les approximations théoriques. Les résultats de la simulation sont analysés.

En particulier on discute l'hypothèse de discrétisation, qui est une des méthodes de réduction des erreurs dues à l'arithmétique à précision limitée de l'ordinateur.

B I B L I O G R A P H I E

La Bibliographie est séparée en 5 parties :

- Quelques références générales sur la simulation. p- 17-18
- Quelques références générales sur les files d'attente et les processus stochastique p- 23-24
- Références sur la validité des simulations. p- 42-44
- Références sur les nombres aléatoires. p- 176-178
- Références sur les erreurs de troncature . p- 99
- Références sur les files à service constant, ou à capacité limitée et les réseaux. p- 283-284

-:-:-:-:-

C H A P I T R E I

Position du problème.

I.1 Définition des simulations

I.2 Définition des files d'attente

I.3 Validité des simulations : généralités

I.4 Exemple d'une simulation M/M/I

I.1 Définition d'une simulation

La notion de simulation est difficile à définir car elle peut prendre des aspects variés. Disons d'abord qu'elle appartient à l'ensemble des techniques qui permettent d'étudier un phénomène réel, en utilisant un modèle, qu'elles construisent et dont elles observent le comportement, au lieu d'étudier le phénomène réel.

La notion de simulation est donc liée à la notion de modèle. En fait il existe beaucoup de sortes de modèles; par exemple *le modèle réduit* est un modèle physique. Pour un constructeur qui veut étudier la sécurité des véhicules en fonction de la courbure des virages, il est préférable d'utiliser des circuits de taille réduite et des modèles miniatures plutôt que de construire des automobiles coûteuses et d'étudier les accidents possibles. L'utilisation de modèle réduit pourrait être considérée comme une simulation au sens large.

On peut utiliser aussi des *modèles analogiques*. On étudie un phénomène physique régi par les mêmes lois que le phénomène qu'on veut étudier. Par exemple au lieu d'étudier certains systèmes mécaniques on utilise l'analogie électro-mécanique, les équations dynamiques étant les mêmes pour les deux phénomènes. Les intensités de courant $\frac{dq}{dt}$ sont analogues au déplacement des points matériels. Les self-inductions sont analogues aux masses des points matériels. L'inverse des capacités est analogue à la raideur du ressort.

Cependant nous n'allons considérer dans la suite, que les *modèles mathématiques*, et les études possibles par le calcul. Le système est représenté par un ensemble de relations mathématiques entre les variables intéressantes pour le problème. Considérons le classement suivant donné par Lambert [1].

		Nature des problèmes	
		déterministe	stochastique
Nature des modèles	déterministe	analyse numérique	calcul des probabilités
	stochastique	méthode de Monte-Carlo	simulations

Donnons un *exemple classique de méthode de Monte-Carlo*. Etant donné une fonction f intégrable, telle que :

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad 0 \leq f(x) \leq 1$$

Nous voulons résoudre le problème déterministe suivant :

Calculer $\lambda = \int_0^1 f(x)\, dx$, c'est-à-dire que nous voulons calculer l'aire hachurée A sur la figure 1.

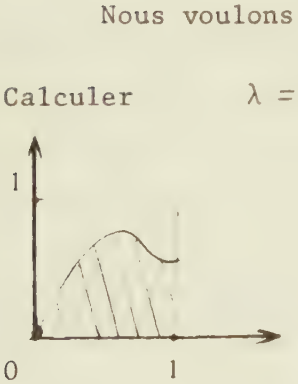


Fig. 1

Nous allons construire une variable aléatoire M uniformément répartie dans le carré d'aire C = 1. Nous aurons :

$$\lambda = \frac{A}{C} = \frac{Proba\ [M \in A]}{Proba\ [M \in C]} = Proba\ [M \in A]$$

Si Z_A est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $M \in A$, c'est-à-dire telle que :

$$Z_A = 1 \quad \text{si} \quad M \in A$$

$$Z_A = 0 \quad \text{si} \quad M \notin A$$

On a :

$$\mathbf{E}\,[Z_A] = \lambda$$

Pour générer la variable aléatoire M, il suffit de générer 2 variables aléatoires X et Y uniformément réparties sur [0,1]. Le point M aura pour coordonnées (X, Y).

$$Z_A = 1 \quad \text{si} \quad Y \leq f(X)$$

$$Z_A = 0 \quad \text{si} \quad Y > f(X)$$

Donnons un *exemple de simulation de processus stochastique.* *

Supposons qu'une équipe veuille régler une série de feux le long d'une route. Elle peut aller sur place faire un grand nombre d'expériences. Elle verra qu'en réglant les feux d'une certaine manière elle provoquera des "bouchons". En les réglant différemment, le bouchon ne se produira qu'à certaines heures .Il est facile de comprendre que les automobilistes protestant, il ne sera pas possible de faire un nombre d'expériences suffisant pour trouver le réglage optimal.

Il est indispensable d'utiliser un modèle. La construction d'un circuit routier en miniature est une méthode possible, mais s'il s'agit de résoudre un problème aussi difficile que l'optimisation de la politique des feux cette méthode se révèlera impuissante.

L'analogie hydraulique est utilisable dans certains cas pour représenter des flots de voiture, mais il est bien clair que le comportement des automobilistes ressemble assez peu à celui d'un liquide.

Il est donc indispensable d'utiliser un modèle mathématique. Les arrivées des véhicules étant aléatoires, la conduite des conducteurs étant aléatoire , ce modèle sera stochastique et ne sera pas simple. On devra étudier un ensemble de véhicules caractérisés par leur position, leur vi-

* Un processus stochastique est une fonction aléatoire d'une variable réelle continue t qui peut être le temps.

tesse, et éventuellement leur accélération... et les feux caractérisés par leur couleur et l'heure du prochain changement de couleur. On va donc faire une simulation. La machine calculera soit à chaque instant, soit événement par événement les valeurs des différents paramètres caractérisant le système.

J'ai participé à une simulation d'une suite de carrefours sur la RN2. Le modèle était approximativement le suivant. Le temps de parcours sur un tronçon allant d'un feu à un autre était considéré comme constant lorsque la voie était libre, c'est-à-dire que le tronçon n'était qu'un dispositif de retard. Les carrefours étaient alors décrits en utilisant des piles : suite de véhicules ayant la même destination immédiate et ayant quitté la pile précédente, chacun des véhicules étant caractérisé par son "temps au plus tôt", temps avant lequel il ne peut pas quitter la pile; le "temps au plus tôt" d'un véhicule, temps qui dépend par exemple du temps de parcours du tronçon est calculé de telle sorte qu'il soit supérieur ou égal au "temps au plus tôt" des véhicules précédents de la pile. Les piles sont représentées en machine par des listes. Sur la figure 2 on voit un schéma de carrefour avec les 4 sortes de piles.

1 pile d'entrée

2 pile tourne à droite

3 pile tourne à gauche

4 pile de sortie

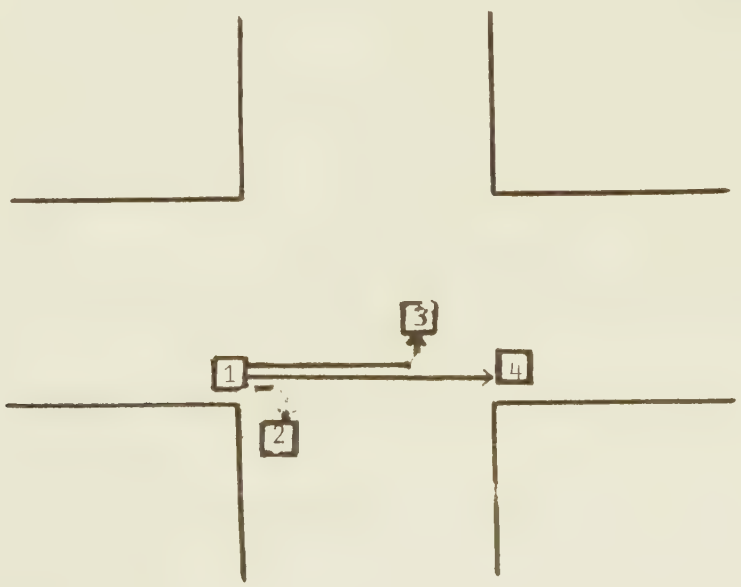


Fig. 2

Comme il y avait 10 carrefours en série avec pour chacun 3 ou 4 branches, c'est-à-dire 12 ou 16 piles, cela représentait un calcul assez complexe. Nous reviendrons sur cet exemple plus loin en particulier en nous interrogeant sur la validité de la simulation. Nous allons déjà donner la définition d'une file d'attente puisqu'il apparaît que la plupart des simulations effectuées pratiquement sont des simulations de file d'attente. (Nous verrons qu'une pile de la simulation de la RN2 ressemble beaucou à une file d'attente).

Quelques références générales sur la simulation

[1] LAMBERT : *Méthodes de Monte Carlo* - Bulletin de la Soc de stat (1958) - Cahiers du centre d'étude de la R.O. (1958).

[2] P. ROSENTIEHL et A. GHOUILA-HOURI : *Les choix économiques : décisions séquentielles et simulation.* Dunod. (1960)

[3] A.N. CHORAFAS : *La simulation mathématique et ses applications.* Dunod (1966).

[4] *La simulation* : Monographie publiée par l'A.F.I.R.O. Dunod (1967).

[5] K.D. TOCHER : *The Art of Simulation.* Van Nostrand (1963).

[6] R. FAURE : *Eléments de la Recherche Opérationnelle.* Paris Gauthier Villars (1968)

[7] J. AGARD : *Méthodes de simulation Monte Carlo et jeux d'entreprises.* Cours de 3ème cycle - Université Paris VI.

[8] P.L. HENNEQUIN : *Méthodes de Monte Carlo et techniques de simulation.* Université de Clermont-Ferrand.

[9] J. ARSAC : *La science informatique.* Dunod. 1970.

[10] G.S. FISHMAN : *Concepts and methods in discrete event digital simulation.* Wiley (1973).

[11] CHORAFAS, N. DIMITRIS : *Systems and simulation.* Academic Press, NY (1965).

[12] T.H. NAYLOR : *The design of computer simulation experiments.* Duke Univ. Press, Durham (1969).

[13] Y. CHU : *Digital simulation of continuous systems.* Mc Graw Hill (1969).

[14] S.H. HOLLINGDALE : *Digital simulation in operational research.* American Elsevier Publishing CO., N.Y. (1967).

[15] F.F. MARTIN : *Computer modeling and simulation.* Wiley, N.Y. (1968).

[16] J.H. MIZE and J.G. COX : *Essentials of simulation.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1968).

[17] T.H. NAYLOR and J.L. BALINTFY :*Computer simulation techniques.* Wiley, N.Y. (1966).

[18] NATO Conf : *Digital simulation in operation research.* English Univ. Press, London (1967).

I.2 Généralités sur les files d'attente

Une file d'attente est constituée par *un flot de "clients" qui demandent un certain "service", mais qui à cause de certaines restrictions sur la loi du "service" peuvent être obligés d'attendre*. Par exemple, un *"client"* peut être obligé d'attendre si un nombre fini *n* de *"clients"* sont servis à la fois seulement, et s'il arrive lorsque le ou les *"serveurs"* sont occupés à servir ce nombre *n* de clients.Un client peut être obligé d'attendre aussi si le serveur a décidé de se reposer.

Les termes *"clients"* ou *"serveurs"* peuvent s'appliquer à un grand nombre d'objets. Donnons quelques exemples :

- les clients chez un dentiste,
- les clients attendant devant les caisses d'un supermarché,
- les voitures attendant à un carrefour : pour passer, une voiture doit attendre que le feu soit vert et que toutes les voitures qui la précèdent soient passées,
- le problème des transmissions de données est un problème de file d'attente. Il y a un nombre fini de récepteurs, et un message ne peut être reçu que si un récepteur est libre et en fonctionnement. Les réseaux téléphoniques, les systèmes informatiques donnent des exemples multiples,
- chaque fois qu'un utilisateur de système informatique demande une ressource au système (ressource logicielle : compilateur, programme... ou ressource matérielle : mémoire centrale, unité centrale, le processeur qui exécute...) le superviseur met la demande dans une file d'attente. En particulier pour les entrées-sorties les différents utilisateurs se partagent le canal d'accès aux périphériques. Ce canal multiplexé est unique et à un instant donné il ne transmet qu'une demande.

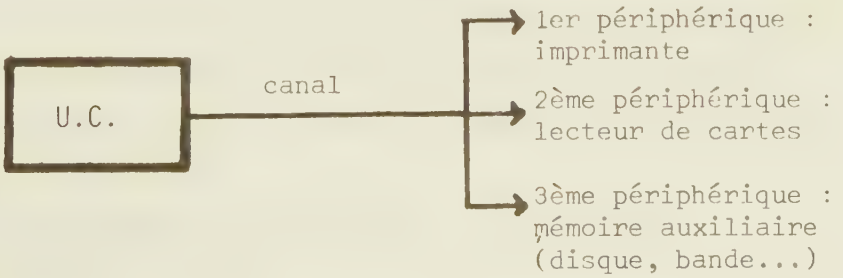


Fig.3

Pour décrire une file d'attente, il faut répondre aux questions suivantes :

1) Quel est *le processus des arrivées ?* On donne la loi de l'intervalle de temps séparant les instants de 2 arrivées successives.

2) Quelle est *la loi du service ?* Il faut savoir :

a) Quand les serveurs sont au repos et quand ils travaillent.
b) Combien de clients peuvent être servis à la fois .
c) Quelle est la loi de la durée du service .

3) Quelle est *la discipline dans la file ?* C'est-à-dire quand un serveur est disponible quel est le client qu'il choisit, ou quels sont les clients qu'il choisit ?

Une file est un ensemble de clients ayant le même processus d'arrivée, la même loi de service et la même discipline.

Dans des systèmes un peu compliqués on décompose les clients en un certain nombre de files différentes. Les quantités les plus souvent étudiées sont :

- le temps d'attente de chaque client,

- La moyenne de la longueur de la file : c'est le nombre de clients en attente ou en service,

- le taux d'occupation d'un serveur : c'est le quotient entre la durée d'occupation et la durée totale.

Remarque : il est possible qu'il y ait des intéractions entre le processus des arrivées et l'état du système ou entre la loi du service et les arrivées. Il est possible par exemple que les serveurs travaillent plus vite si de nombreux clients attendent, il est possible que les clients ne viennent pas si la file est trop longue.

La plupart des simulations sont des simulations de trafic, comportant des files d'attente. La résolution mathématique est en effet en géné-

ral impossible, dès que le service n'est pas très particulier ou dès que les arrivées ne sont pas très particulières.

Exemple : la file M/M/I * est une file dont les caractèristiques sont les suivantes :

- Les arrivées forment un processus de Poisson c'est-à-dire que les intervalles séparant les instants de deux arrivées successives, t_n et t_{n+1} sont des variables indépendantes, et de même loi, la loi exponentielle $F(x)$:

$$X_n = t_{n+1} - t_n$$

$$Prob\ [X_n < x] = F(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a est le taux d'arrivée, la moyenne du temps séparant deux arrivées successives est $\frac{1}{a}$.

- Il y a un seul serveur qui ne se repose jamais, dès qu'un client arrive il le sert, il en sert un seul à la fois. Les durées de service sont des variables aléatoires positives indépendantes de même loi , la loi exponentielle $H(x)$.

Si Y_n est la durée du $n$ième service

$$Prob\ [Y_n < x] = H(x)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

b est le taux de service.

La moyenne du temps de service est $\frac{1}{b}$

On pose $\rho = \frac{a}{b}$. ρ est l'intensité du trafic.

* M/M/I : Markov / Markov / 1

- La discipline de la file est FCFS (first come,first served),c'est-à-dire que le serveur sert en premier celui qui attend depuis le plus longtemps. Certaines variables comme la moyenne de la longueur de la file et le taux d'occupation du serveur ne dépendent pas de la discipline de la file.

La file M/M/I est une file pour laquelle il n'y a pas d'interaction entre le processus des arrivées et celui des services.

Les $P_n(t)$: probabilités pour que la file à l'instant t comporte n clients (y compris celui qui est en train d'être servi) sont solutions du système.

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -a\ P_0(t) + b\ P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = -(a+b)\ P_1(t) + aP_0(t) + bP_1(t)$$

$$\vdots \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -(a+b)\ P_n(t) + aP_{n-1}(t) + bP_{n+1}(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

On démontre, ce qui est évident intuitivement, que pour $\rho > 1$ il y a divergence. On démontre aussi que pour $\rho = 1$, il y a divergence, et que pour $\rho < 1$ il y a une limite stationnaire :

$$P_n(t) \underset{t\to\infty}{\to} P_n = (1-\rho)\rho^n$$

L'espérance de la longueur de la file :

$$E\,[L(t)] \to M = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

La variance de cette longueur :

$$\sigma^2\,[L(t)] \to V = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(1-\rho)\rho^n - M^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Quelques références générales sur les files d'attente

et les processus stochastiques

---

[19] J.W. COHEN : *The single server queue.* North Holland Publishing (1969).

[20] N.U. PRABHU : *Queues and inventories.* Wiley (1965).

[21] Lisbon 27 th Sept. 1st Oct. 1965 : *Queuing Theory edited by R. CRUON.* English Univ. Press, London (1967).

[22] P. LE GALL : *Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques* . Tome 1. Dunod (1962).

[23] W. FELLER : *An introduction to probability theory and its application.* Wiley (1966).

[24] L. TAKACS : *Introduction to the theory of queues.* N.Y. Oxford Univ. Press (1962)

[25] R. FORTET : *Elêments de la théorie des probabilités.* Editions du CNRS (1965)

[26] P.M MORSE : *Queues, Inventories, and Maintenance.* New York Wiley (1958)

[27] A. KAUFMANN and R. CRUON : *Les phênomènes d'attente. Théorie et applications.* Dunod. Paris 1961.

[28] A. SOMMERFELD : *Partial differential equations in physics.* Academic Press N.Y. 1949.

[29] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET : *Théorie des fonctions aléatoires.* Masson (1953).

[30] D.R. COX : *Renewal theory.* Methuen, London (1962).

[31] D.R. COX and H.D. MILLER : *The theory of stochastic processes.* Methuen, London (1965).

[32] D.R. COX and P.A.W. LEWIS : *The statistical analysis of series of events.* Methuen, London (1968).

[33] G.F. NEWELL : *Applications of queuing theory*. Chapman-Hall, London (1971).

[34] V.E. BENEŠ : *General stochastic processes in the theory of queues*. Addison Wesley Publishing Co. London (1963).

[35] P.M. MORSE : *Stochastic properties of waiting lines*. Journal of the operation research Soc. of America (1955) vol3 p. 255-261.

[36] E. PARZEN : *Stochastic processes*. Holden day, San Francisco (1962).

[37] E. PARZEN : *Time series analysis papers*. Holden day, San Francisco (1967).

[38] M.S. BARTLETT : *An introduction to stochastic processes*. Cambridge Univ. Press (1955).

[39] J.L. DOOB : *Stochastic processes*. Wiley N.Y. (1953).

[40] P.H. DIANANDA : *Some probability limit theorems with statistical applications*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953) p. 239-246.

I.3 Validité des simulations

Il n'y a pratiquement pas d'autres moyens d'étudier un trafic un tout petit peu compliqué qu'en faisant une simulation.

Le problème auquel nous nous intéressons aujourd'hui est celui de la validité de ces simulations. Lorsqu'un physicien fait une expérience, il se pose le problème de la validité de son expérience. Une simulation est une expérience particulière et les problèmes de validation sont multiples.

a) Des problèmes liés à chaque cas particulier : validité du modèle. Le modèle mathématique est-il assez proche de la réalité ? Quand on étudie des phénomènes humains en particulier (mais ceci est vrai aussi pour les problèmes de gestion, d'usure des pièces,...) on n'est jamais sûr de bien prévoir les réactions. On fait des mesures (dont il faut justifier l'exactitude) et de là on déduit des lois que suivent de façon approchée les phénomènes étudiés. Par exemple, on se place sur une route et on constate que les voitures arrivant à une certaine heure peuvent être considérées comme formant un processus de renouvellement. Puis on étudie le système formé par le carrefour, et on voit que les voitures mettent un certain temps avant de démarrer quand le feu devient vert; il faut étudier la loi de démarrage. On est amené à faire des hypothèses simplificatrices (par exemple il arrive que l'on néglige les piétons). Il faut justifier ces hypothèses.

Les personnes qui font des simulations ont déjà tellement de difficultés à justifier leur modèle qu'elles ne se posent en général pas de problèmes de fond sur la validité de la simulation. Il y en a pourtant beaucoup.

b) Il y a le problème des nombres aléatoires. Les nombres que la machine nous donne sont-ils réellement aléatoires ? La réponse est évidemment non. En effet pour utiliser des nombres reproductibles et occupant peu de place mémoire on utilise des suites numériques itératives. Dans quelle mesure ces nombres ont-ils les mêmes propriétés que des nombres vraiment aléatoires ? Quelles conséquences le choix de ces nombres a-t-il sur les résultats de la simulation ?

c) Il y a les problèmes liés au fait qu'on a un processus stochastique. Pour les processus stochastiques tendant vers une limite stationnaire, même si la limite ne dépend pas de l'état initial (ce qu'il faut démontrer) la vitesse avec laquelle cette limite est atteinte en dépend évidemment. Lorsqu'on fait une telle simulation commençant à l'instant T_0 avec certaines valeurs initiales, on néglige une période (de T_0 à T_1) que l'on considère comme transitoire et on étudie les sorties pendant la période de T_1 à T_1+T. En particulier on ne fait les moyennes que sur les valeurs obtenues après T_1. On considère qu'à partir de T_1, l'état limite est à peu près atteint et il faut évaluer la précision avec laquelle on le connaît en fonction du temps T.

d) Il y a les problèmes de précision liés au fait qu'une simulation est une expérience. Si on en avait fait une autre on aurait obtenu un autre résultat. Pour obtenir un résultat intéressant il faudrait faire beaucoup d'expériences, faire la moyenne, et voir quels sont les écarts entre cette moyenne et les résultats particuliers. Faire beaucoup de simulations coûte très cher et il faut discuter pour savoir si ces simulations sont assez indépendantes, si on répartit bien de la bonne façon les valeurs initiales et les valeurs des paramètres; mais lorsqu'on peut appliquer le théorème ergodique on sait qu'on peut au lieu de faire beaucoup de simulations en faire une seule de durée assez longue. En ce cas il se pose le problème de la durée de la simulation.

e) Il y a les problèmes de précision liés au fait que la machine utilise une arithmétique à précision limitée. Les nombres en machine n'ayant qu'un nombre limité de chiffres significatifs, une erreur est commise pour presque chaque opération effectuée par la machine. Cette erreur se propage dans la suite des calculs. C'est cette propagation de l'erreur qu'il faut étudier en détail.

Reprenons l'exemple de la simulation du trafic sur la RN2. Cette simulation est longue et complexe. Il y a dix feux rouges en série. On admet que les arrivées sont poissonniennes, mais les feux sont adaptatifs. On ne réussit pas à démontrer qu'on a un processus de Markov, ni même à démontrer qu'on a un processus stationnaire(les hypothèses vont dans ce sens : on admet qu'on est à l'heure de pointe et que les paramètres des lois de Poisso

sont constants). On a même l'impression qu'il y a une certaine périodicité et des battements. Nous avons essayé d'étudier théoriquement la précision obtenue. Mais cela s'est révélé impossible à l'époque (1969). La seule chose positive que nous ayons pu faire pour valider cette simulation était : faire une comparaison entre les entrées mesurées et les entrées simulées (en ce qui concerne la matrice origine-destination) et entre les sorties mesurées et les sorties simulées (en ce qui concerne les temps de parcours) le jour où on a effectué les mesures, avec les hypothèses de fonctionnement réalisées ce jour-là. Il est évident que cette comparaison montre que la simulation n'est pas complètement fausse, qu'on a fait durer celle-ci assez longtemps,mais cela ne nous indique absolument rien en ce qui concerne les autres simulations qu'on fera avec par exemple une politique de feux différente. Et il est superflu d'ajouter que si on ne peut pas faire de simulation en prenant d'autres hypothèses, ni d'autres valeurs initiales que celles qui ont été réalisées concrètement, la simulation devient inutile, il vaut mieux faire des expériences sur le terrain.

La conclusion qui s'est imposée est donc qu'il faut choisir pour pouvoir faire une étude théorique, des exemples très simples. C'est pourquoi nous allons d'abord présenter une étude de la validité des simulations, en utilisant un exemple très simple de file d'attente : une file M/M/I. Ces files ont l'avantage d'être résolubles mathématiquement, ainsi nous pourrons comparer les résultats des simulations avec les résultats théoriques.

En fait, dans la pratique, un système réel ne sera jamais exactement un système M/M/I. Les processus réels ne sont qu'approximativement poissonniens, les services réels ne sont qu'approximativement exponentiels. Mais nous allons dans la suite faire l'hypothèse suivante : considérons un système réel qui soit exactement un système M/M/I. Quelle est la validité de la simulation que nous faisons? En fait ceci signifie que parmi l'ensemble des problèmes qui se posent pour la validation d'une simulation et que nous avons cités,a), b), c), d), e), nous négligeons ceux du a).

Considérons une simulation dont le but serait de mesurer l'espérance de la longueur de la file $L(t)$. En fait on va estimer la limite stationnaire de $L(t)$, c'est-à-dire le nombre M :

$$M = \lim_{T \to \infty} E[L(T)]$$

On calcule la moyenne temporelle. La longueur de la file peut être modifiée par deux événements : une arrivée ou un départ. Soit T_i l'instant du $i^{ème}$ événement et L_i la longueur de la file entre T_i et T_{i+1}. Pour estimer la moyenne de la longueur de la file nous sommes amenés à considérer :

$$M(T_n) = \frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^{n} L_i (T_{i+1} - T_i) \qquad (2)$$

Le théorème ergodique nous indique que la limite de la moyenne temporelle est la limite de l'espérance :

$$M = \lim_{n \to \infty} M(T_n)$$

Nous connaissons la valeur théorique M, pour le système $M/M/I$, il est intéressant de faire des simulations et de comparer les estimations obtenues par simulation et la valeur théorique.

Présentons quelques uns des résultats obtenus.

Les simulations de courte durée sur une IBM 1130 ayant donné de mauvais résultats, la nécessité d'étudier les variations des résultats en fonction du temps pendant une très longue durée s'est imposée. Les passages ont donc été faits sur une plus grosse machine. (IBM 370).

Les courbes des figures 4 à 13 donnent pour différentes valeurs de ρ, les variations de $\frac{\Delta M}{M}$, en fonction du nombre d'arrivées N. $\frac{\Delta M}{M}$ est défini par :

$$\frac{\Delta M}{M}(N) = \frac{M(N) - M}{M}$$

M est la moyenne théorique limite.

$M(N)$ est la moyenne temporelle de la longueur de la file, pendant la durée séparant la 1ère arrivée et la Nième arrivée.

La simulation a été faite avec soin et ne comporte pas d'erreurs de programmation. (Voir le listing ci-joint). Les nombres pseudo-aléatoires utilisés sont les nombres généralement utilisés par les utilisateurs de cette machine. (Voir le listing ci-joint du SUBROUTINE POISS.).Ces nombres sont considérés par les habitués comme des nombres de très bonne qualité.

Remarque : Nous avons utilisé des temps écrits en flottant. Il n'est pas possible de justifier l'utilisation de nombres entiers pour les temps. Par exemple pour des durées séparant deux arrivées de moyenne 5, on prend des intervalles entiers compris pratiquement entre 0 et 10, et pour des durées de service de moyenne 2, on prend des temps 0, 1, 2, 3, 4; ceci est une modification du modèle que ceux qui font des simulations oublient de justifier; voilà pourquoi nous présentons les résultats obtenus en prenant des temps non entiers, et en faisant durer les simulations plus longtemps, dans le cas de convergence.

On voit apparaître deux phénomènes :

- au début pour des valeurs de N qui sont assez petites, le phénomène important est celui de la convergence de l'estimateur. Pour des valeurs de ρ assez faibles, la convergence est assez rapide. Pour $\rho = 0{,}9$ et au-dessus de cette valeur, la convergence est si lente que même pour $N = 8.10^4$ elle n'est pas nette; nous avons été obligés de changer d'échelle.

- pour des valeurs de N qui sont très grandes, le phénomène important est la décroissance de l'estimateur. Nous chercherons au chapitre II la cause de cette décroissance.

Nous pouvons constater en tous cas que pour de nombreuses valeurs de ρ, la quantité $\left|\frac{\Delta M}{M}\right|$ reste toujours supérieure à 2%, ou à 5%. *Une simulation extrêmement simple, faite sur une très bonne machine, dans les conditions les meilleures dans lesquelles un expérimentateur est susceptible de travailler, peut très bien, aussi longue soit-elle, ne donner que de mauvais résultats. Il arrive même un moment à partir duquel il est préférable de ne pas faire durer plus longtemps la simulation car un biais apparaît.*

Nous allons étudier les causes de ces phénomènes. Nous verrons au chapitre V que l'influence des nombres pseudo-aléatoires est minime devant les deux autres causes d'imprécision : la convergence de l'estimateur et les erreurs de troncatures. Nous allons donc étudier déjà ces deux questions puis nous évaluerons la durée optimale pour une simulation.

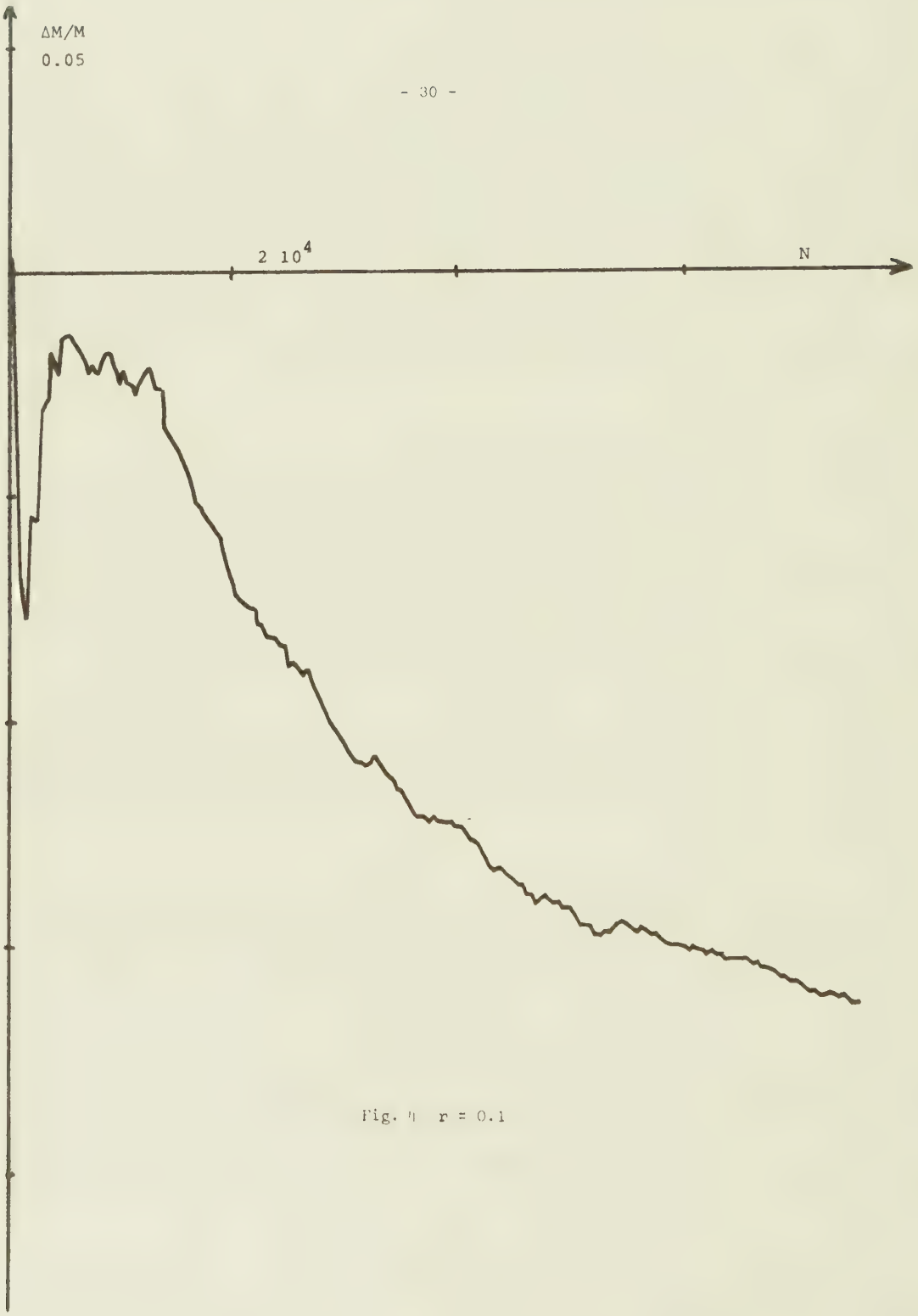


Fig. 7 r = 0.1

Fig. 5

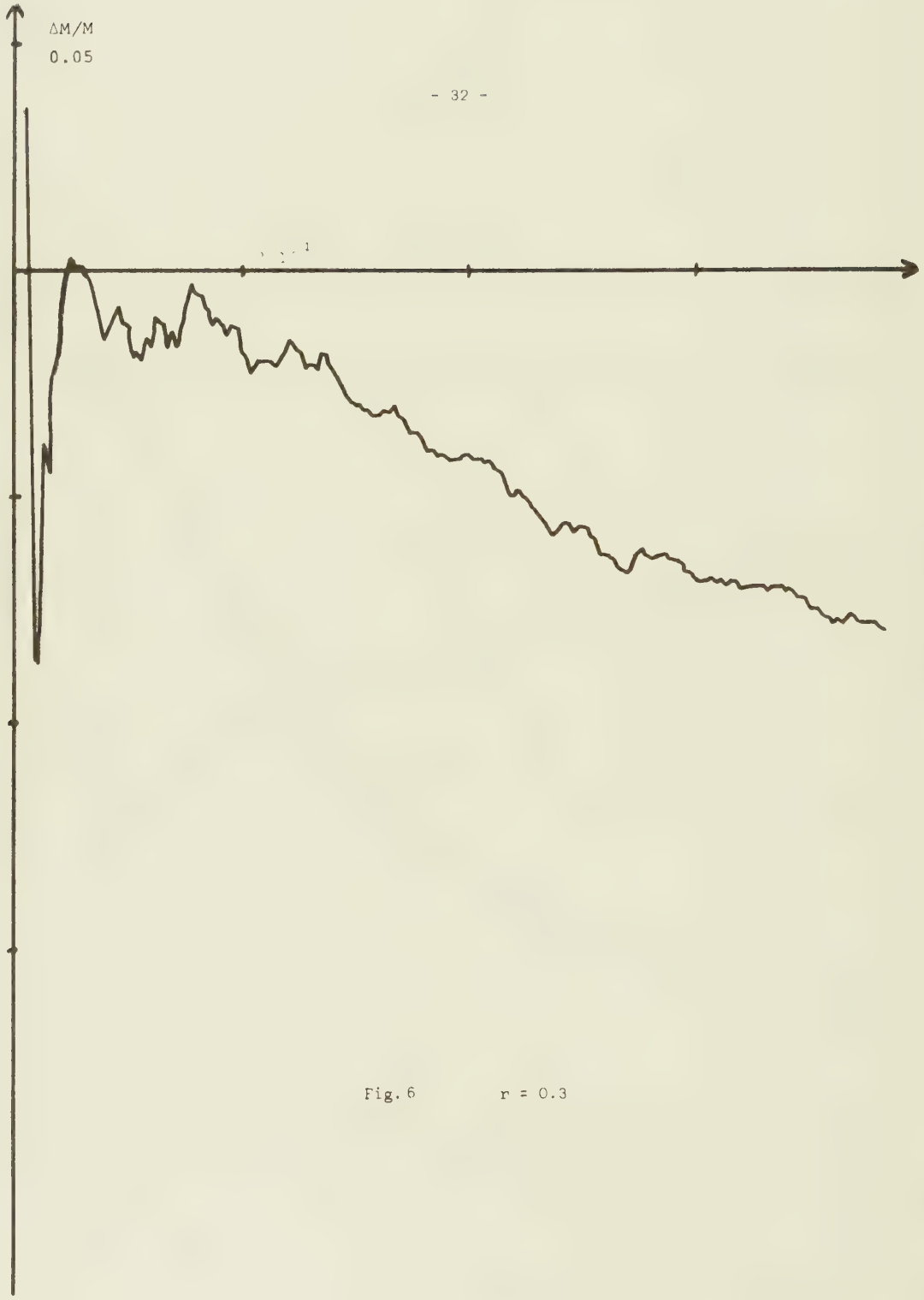


Fig. 6 r = 0.3

Fig. 7 r = 0.4

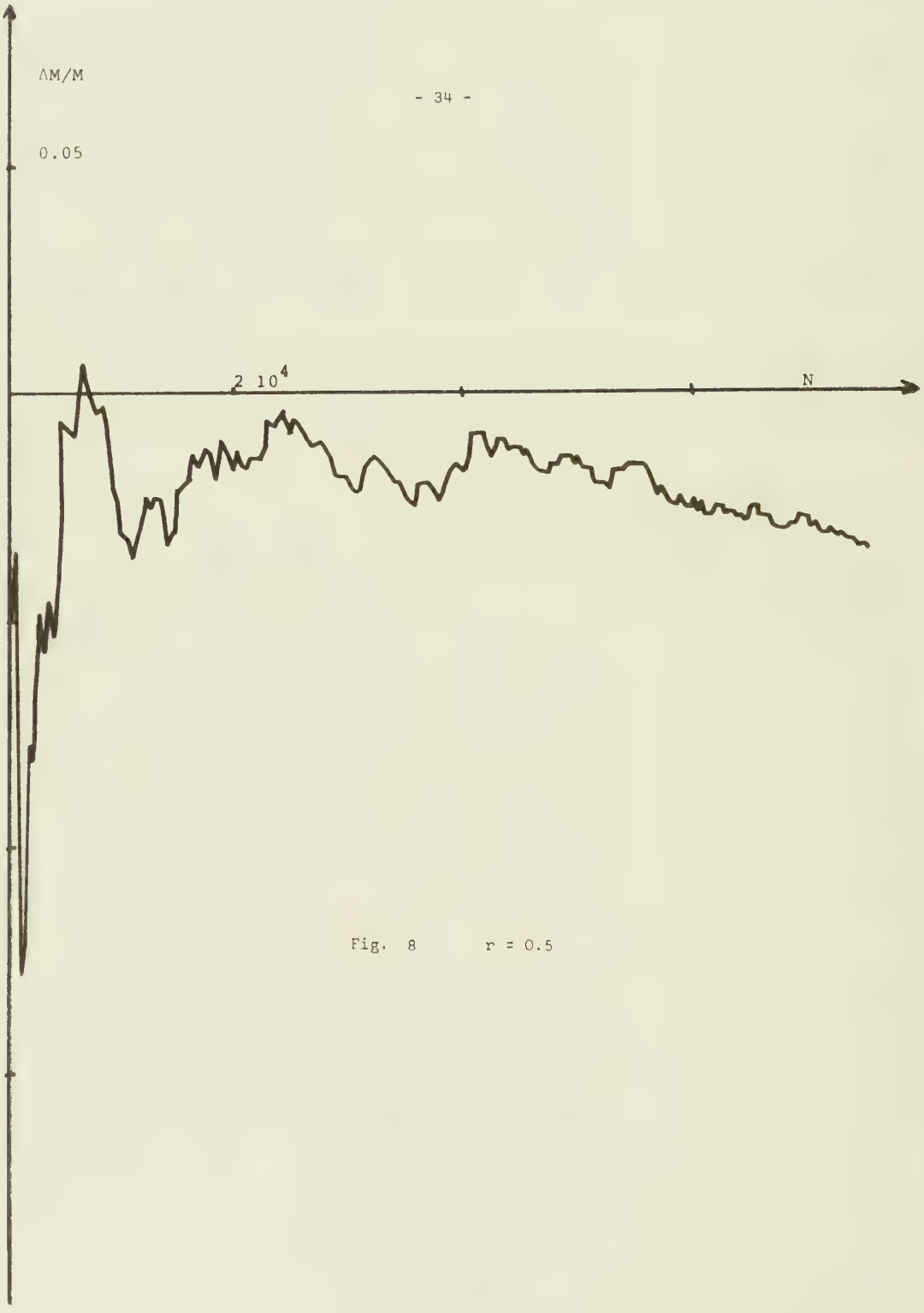


Fig. 8 r = 0.5

Fig 9 r = 0.6

Fig. 10 r = 0.7

Fig. 11 r = 0.8

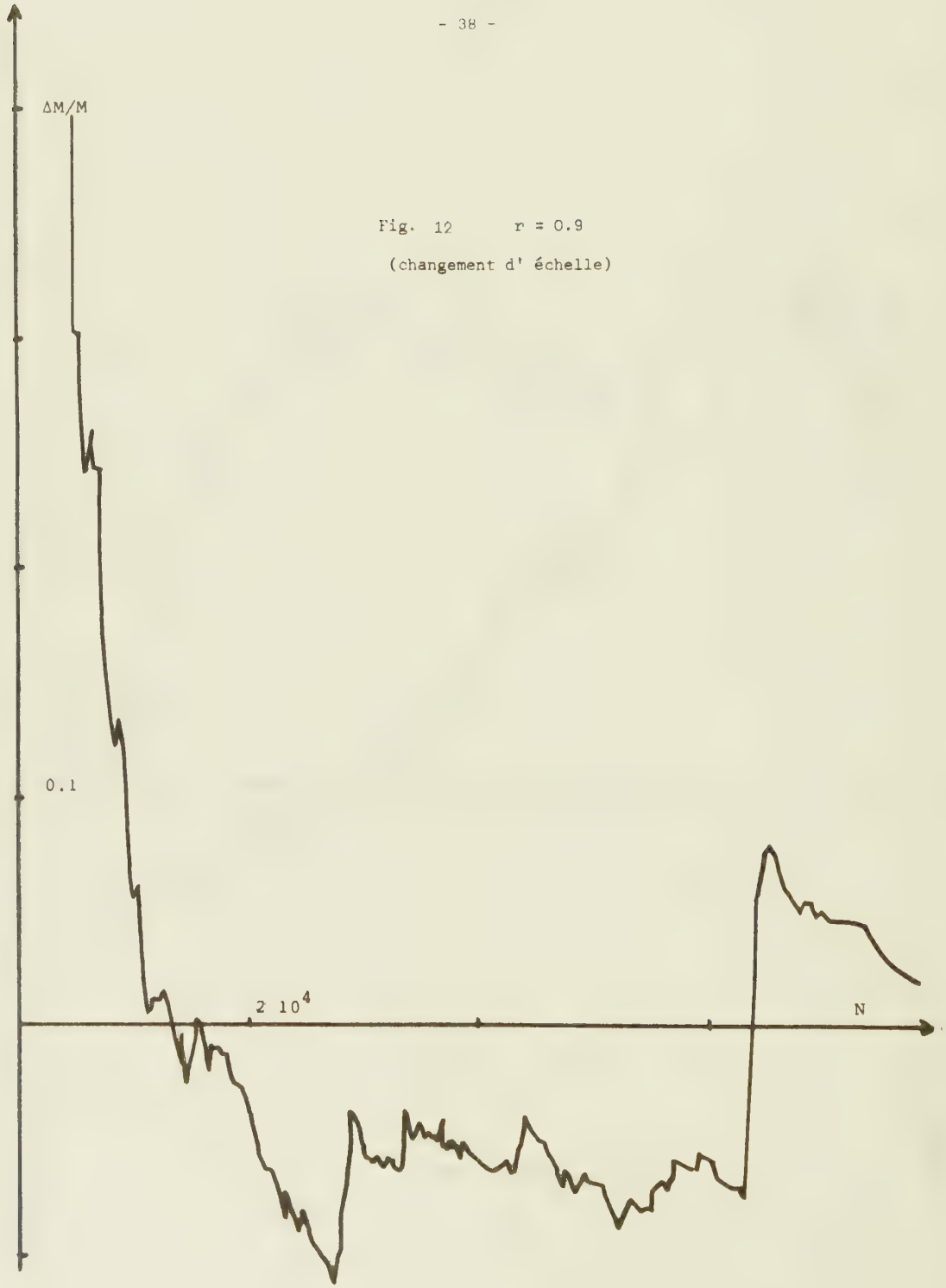


Fig. 12 r = 0.9

(changement d' échelle)

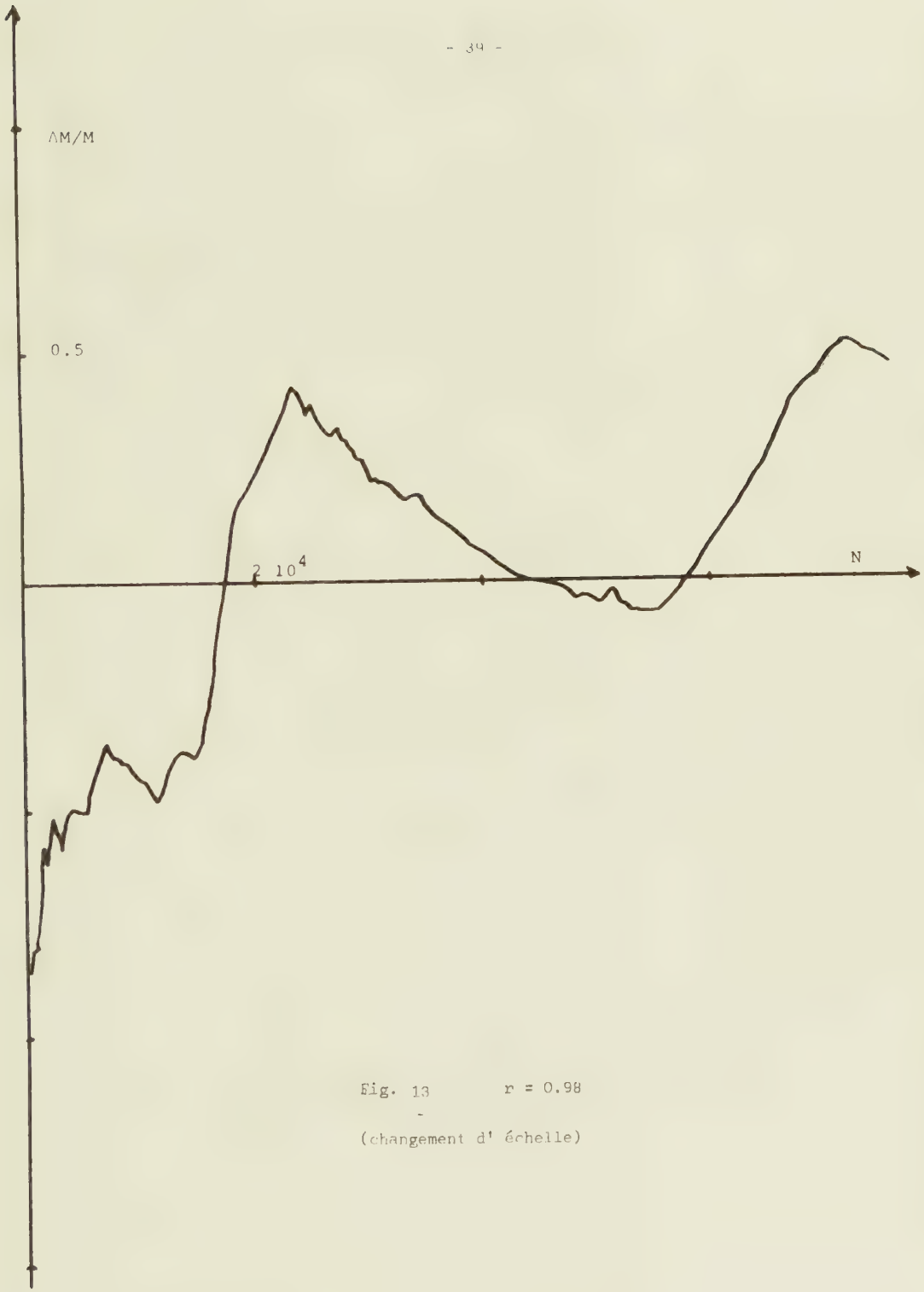


Fig. 13 r = 0.98

(changement d' échelle)

Listing du programme M/M/I

```
0001                 REAL JE,JS
0002                DIMENSION P(50),TITRE(18)
0003                 DIMENSION NZ(100)
0004                 IREAD=5
0005                 IPRINT=6
0006                 READ(IREAD,1)  TITRE
0007           1    FORMAT(18A4)
0008                 WRITE(IPRINT,20)TITRE
0009           20   FORMAT(1H1,18A4)
0010                 READ(IREAD,21) NP,NFIN,JE,JS,K
0011                 WRITE(IPRINT,24)NP,NFIN,JE,JS,K
0012           21   FORMAT(2I10,2F10.2,I10)
0013            24    FORMAT(1H1,2I10,2F10.2,I10)
0014                 DO 2 I=1,NP
0015           2     P(I)=0.
0016                 AM=0.
0017                 AM2=0.
0018                 T=0.
0019                 CALL POISS(S,K)
0020                 DS=S*JS
0021                 CALL POISS(E,K)
0022                 DE=E*JE
0023                 NV=1
0024                 TZERO=0.
0025                 RHO=JS/JE
0026                 AMTH=RHO/(1.-RHO)
0027                 ECTH=RHO/(1.-RHO)**2
0028                 PZTH=1.-RHO
0029                IGEN=1
0030                 IIGEN=1
0031                ISOR=0
0032                 NZERO=1
0033                 SOMAT=0.
0034           14   IF(DE-DS)3,3,4
0035           3    IGEN=IGEN+1
0036                NV1=NV+1
0037                 T1=DE
0038                CALL POISS(E,K)
0039                 DE=DE+E*JE
0040                IF(IGEN-1-ISOR)5,6,7
0041           6    CALL POISS(S,K)
0042                DS=DE-E*JE+S*JS
0043                 NZERO=NZERO+1
0044                 TZERO=TZERO+(T1-T)
0045                GOTO 100
0046            7    GOTO 101
0047           4    ISOR=ISOR+1
0048                NV1=NV-1
```

```
0049          T1=JS
0050         IF(ISOR-IGEN)8,9,5
0051    8    CALL POISS(S,K)
0052         DS=DS+S*JS
0053          GOTO 101
0054    9     DS=2147483647.
0055    101     SOMAT=SOMAT+(T1-T)*(NV-1)
0056    100  DO 10 I=1,NP
0057         IF(I-NV)11,12,11
0058    11     P(I)=P(I)*T/T1
0059         GOTO 10
0060    12       P(I)=(P(I)*T+T1-T)/T1
0061    10   CONTINUE
0062             AM=(AM*T+NV*(T1-T))/T1
0063          AM2=(AM2*T+NV*(T1-T))/T1
0064         NV=NV1
0065          T=T1
0066          IF(IGEN-IIGEN)161,161,2000
0067    2000  IIGEN=IGEN
0068    160    IF((IGEN/800)*800-IGEN)161,1200,161
0069    1200     EC=AM2-AM*AM
0070          EAM=AM-AMTH
0071          EEC=EC-ECTH
0072          ERAM=EAM/AMTH
0073          E1AM=ERAM*SQRT(T)
0074          E1EC=EEC*T
0075           PZERO=FLOAT(NZERO)/FLOAT(IGEN)
0076          ERPZ=(PZERO-PZTH)/PZTH
0077          E1PZ=ERPZ/2.*SQRT(FLOAT(NZERO))
0078          ATMOY=SOMAT/IGEN
0079          P1ZERO=TZERO/T
0080          ER1PZ=(P1ZERO-PZTH)/PZTH
0081          WRITE(IPRINT,13)T,IGEN,ISOR,NV,AM,EC,ATMOY,PZERO,P1ZERO,
             1 (P(I),I=1,NP)
0082    13     FORMAT('  T',F11.2,'  G',I8,'  S',I8,'  L',I8,'  M',F10.3,
             1'  V',F10.3,'  AM',F10.3,'  PO',F10.5,'  PTO',F10.5,/'  PN',
             210F10.5)
0083           WRITE(IPRINT,1300)EAM,ERAM,E1AM,EEC,E1EC,ERPZ,ER1PZ,E1PZ
0084    1300   FORMAT('  EM',F10.5,'ERM',F10.5,'  ERMT',F10.3,'  EV',F10.5,
             1' EVT',F10.3,'ERPO',F10.5,' ERPTO',F10.5,' LPO',F10.5/)
0085    161    IF(IGEN-NFIN)14,14,5
0086    5     CONTINUE
0087          STOP
0088          END
```

```
0001                SUBROUTINE POISS(E,IX)
0002                IX=IX*65539
0003                IF(IX)1,2,2
0004           1    IX=IX+2147483647+1
0005           2    E=FLOAT(IX)/2147483647.
0006                E=-ALOG(E)
0007                RETURN
0008                END
```

Références sur la validité des simulations

[41] R. FORTET et CH. GRANDJEAN : *Congestion d'un système à appels perdus dans lequel les appels peuvent occuper un ou plusieurs organes simultanément.*

[42] R. FORTET : Etudes relatives à des problèmes d'occupation.

[43] P. LE GALL : *Les méthodes de simulations aléatoires et leurs applications à l'étude des problèmes de télétrafic.* Commutation et electronique, n° 4 (Avril 1963) p. 44-58.

[44] P. LE GALL : *L'ergodisme et la convergence des simulations de phénomènes aléatoires.* Ann des Telecomm.t 22 n° 7-8 (Juillet-Août 1967) 211-228.

[45] P. LE GALL : *Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques.* Tome 1. Dunod, Paris (1962).

[46] G.S. FISHMAN and P.J. KIVIAT : *Spectral analysis of time series generated by simulation models.* Rand Corporation (Féb. 1965).

[47] G.S. FISHMAN : *Problems in the statistical analysis of simulation experiments : the comparison of means and the length of sample records.* Com. of the ACM Vol 10 Number 2 (Féb. 1967) 94-99.

[48] G.S. FISHMAN and P.J. KIVIAT : *The analysis of simulation generated time series.* Management Science Vol 13 n°7 (March 1967) 525-557.

[49] G.S. FISHMAN : *Estimating sample size in computing simulation experiments.* Management Science vol. 18 n°1 (Sept. 1971) 21-37.

[50] G.S. FISHMAN : *Variance reduction in simulation studies.* J. Statistical Computation and Simulation Vol. 1 (1972) p. 173-182.

[51] G.S. FISHMAN : *Bias considerations in simulation experiments.* J. Statistical Computation and Simulation (1972).

[52] G.S. FISHMAN : *Statistical analysis for queuing simulations.* Management Science Vol. 20 n°3 (Nov. 1973) 363-369.

[53] G.S. FISHMAN : *Estimation in multiserver queuing simulations.* Oper. Res. 22, 72 (1974)

[54] M.A. CRANE and D.L. IGLEHART : *Simulating stable stochastic systems I : general multiserver queues.* J.A.C.M. Vol 21 n°1 (Janv. 1974) 103-113.

[55] M.A. CRANE and D.L. IGLEHART : *Simulating stable stochastic systems II : Markov chains.* J.A.C.M. Vol 21 n°1 (Janv. 1974) 114-124 .

[56] M.A. CRANE and D.L. IGLEHART : *Simulating stable stochastic systems III : regenerative processes and discrete event simulations.* Operation Research Vol 23 n°1 (Janv-Feb. 75) 33-45.

[57] M.A. CRANE and D.L. IGLEHART : *Simulating stable stochastic systems IV : approximation techniques.* Management Science. Vol. 21 n° 11, (July 1975) 1215-1224.

[58] S.S. LAVENBERG and T.R. SLUTZ : *Introduction to regenerative simulation.* I.B.M. Journal on research and developpement (Sept. 1975).

[59] S.S. LAVENBERG and T.R. SLUTZ : *Regenerative simulation of a queuing model of an automatic tape library* I.B.M. Journal on research and development (sept. 1975).

[60] G. DIETRICH and H. WAGNER : *La simulation du trafic et son application en téléphonie.* Revue des Télécomm. Vol. 38 n°4 (1963) 544 à 553.

[61] R.W. CONWAY : *An experimental investigation of priority assignment in a job shop.* Rand Corporation (Feb. 1964).

[62] R.W. CONWAY : *Some tactical problems in digital simulation.* Management Science Vol 10 n°1 (Oct 1963) 47-61.

[63] M.A. GEISLER : *The sizes of simulation samples required to compute certain inventory characteristics with stated precision and confidence.* Management Science Vol. 10 n°2 (Janv. 1964) 261-286.

[64] M. BECKER : *Fiabilité des simulations des processus stochastiques strictement ergodiques et asymptotiquement stationnaires.* C.R. Acad. Sc. Paris t 274 (26 Juin 1972) 1942-1945.

[65] R.L. VAN HORN : *Validation of simulation results.* Management Science. Vol. 17 n°5 (Jan. 71) 247-258.

[66] G.U. YULE : *On a method of studying time series based on their internal correlations.* J. Roy. Stat. Assoc. 108 (1945) p-208-225.

[67] A.V. GAFARIAN and C.J. ANCKER : *Mean value estimation from digital computer simulation.* Oper. Res. 14, no.1, p-25-44 (1966).

[68] H.A. ERNST : *Problems in computing systems performance modelling : characterization, calibration and validation.* I.B.M. Research RC 3319 (April 1971).

[69] M. BADEL : *Quelques problèmes liés à la simulation de modèle de systèmes informatiques.* Thèse de docteur ingénieur Université Paris VI (28 Mai 1975).

[70] P.L. HENNEQUIN : *Etude élémentaire de la circulation d'une file de voitures.*

[71] G.M. JENKINS : *General considerations in the analysis of spectra.* Technometrics Vol 3. n°2 (May 1961) 133-166.

[72] T.H. NAYLOR and J.M. FINGER : *Verification of computer simulation models.* Management Science, Vol 14 n°2 (Oct 1967) B92 - B101.

[73] D.J. AIGNER : *A note on verification of computer simulation models.* Management Science , Vol 18 n°11 (July 1972) 615-619.

[74] S.S. LAVENBERG and G.S. SHEDLER : *Derivation of confidence intervals for work-rate estimators in a closed queuing network.* SIAM J. Comp. 4, 108 (1975).

[75] R.B.H. KACEM : *Estimation de la longueur d'une simulation en fonction de la précision désirée.* Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1972).

CHAPITRE II

Erreurs de troncature

II.1 Mécanisme des troncatures.

II.2 Evaluation des erreurs de troncature pour un calcul de moyenne.

II.3 Différentes méthodes de réduction du biais et résultats expérimentaux comparés.

II.4 D'autres algorithmes itératifs.

Annexe : Calcul de l'espérance de l'erreur de troncature faite sur une variable aléatoire de répartition uniforme.

Nous avons présenté sur les figures 4 à 13 du chapitre 1, des résultats de simulation. Nous avons porté en abcisse la durée de la simulation, et en ordonnée l'écart relatif entre l'estimateur et la limite théorique. Cet écart devrait tendre vers 0, lorsque la durée de la simulation augmente. Il n'en est rien. Nous allons voir que le biais, très important qui apparaît est du aux erreurs de troncature, en effet :

1) *La machine n'écrit les nombres qu'avec un nombre fini de chiffres significatifs.*

2) *Le calcul d'une moyenne temporelle d'un grand ensemble de variables amène la machine à faire un grand nombre d'additions algébriques de deux termes dont l'un est très grand en valeur absolue par rapport à l'autre.*

- Les nombres réels sont écrits avec une mantisse et une caractèristique. Donnons l'exemple d'une machine travaillant en système hexadécimal.

Un nombre réel X peut être écrit de façon unique.

$$X = 16^{C} \ (0.M)$$

C est l'entier déterminé par :

$$16^{C-1} \leq X < 16^{C}$$

Le nombre réel (0.M) qui est le quotient de X par 16^{C} s'écrit en système hexadécimal sous la forme d'une suite illimitée de chiffres et en général un nombre infini d'entre eux sont non nuls; le premier chiffre de ce

quotient est un zéro, les suivants forment la mantisse M.

Mais la machine ne garde qu'un nombre fini n_0 de chiffres significatifs pour la mantisse et remplace de ce fait la mantisse M par une autre mantisse M' , et le nombre réel X, par un nombre X'. X' est la valeur tronquée de X :

$$X' = 16^{C} \times (0.M')$$

Dans la suite pour tout nombre y , nous appellerons sa valeur tronquée y'.

Par exemple : le nombre $\frac{1}{3}$ qui en système hexadécimal s'écrirait :

$$X = 16^{0} \times (0.5555.....)$$

s'écrit en simple précision dans notre machine (IBM 370/65) qui ne garde alors que 6 chiffres significatifs$(n_0 = 6)$:

$$X' = 16^{0} (0.555555)$$
$$= \frac{1}{3} (1-16^{-6})$$

Cette erreur n'a pas une grande importance relative, mais elle devient importante lorsque le nombre d'opérations effectuées est grand, car à chaque opération une nouvelle erreur est introduite, et les erreurs faites précédemment se propagent.

Nous allons dans ce chapitre étudier en détail le biais dû aux erreurs de troncature faites par la machine lorsqu'elle calcule la moyenne d'un grand nombre de nombres. Nous estimerons ce biais et étudierons différentes méthodes pour le réduire. Les erreurs de troncature ont souvent été étudiées dans la littérature [76 à 85] mais la plupart des résultats ne peuvent pas être utilisés pour le cas spécial de la moyenne d'un grand nombre de nombres. Par exemple les méthodes de perturbation ou de permutation ne peuvent pas être utilisées [84 - 85]. Nous ferons une synthèse des méthodes qui peuvent être utilisées et nous en proposerons quelques unes.

II.1 Mecanisme des troncatures

a) Ecriture d'un nombre réel en "flottant"

Un nombre s'écrit avec 1 bit de signe

7 bits de caractéristique → un nombre C_1

$n_0 \times 4$ bits de mantisse → un nombre M'

pour notre machine en simple précision $n_0 = 6$

4 bits de mantisse correspondent à un chiffre hexadécimal.

Les opérations se font dans le système hexadécimal. Un nombre X s'écrit en flottant $X_{tronqué} = X'$

Pour notre machine : $X' = 0.M' \times 16^{C_1-64}$

Remarques

$$2^{20} \leq M' \leq 2^{24} - 1$$

$$\frac{1}{16} \leq 0.M' \leq 1 - 16^{-6}$$

$$0 \leq C_1 \leq 127$$

$$16^{-65} \leq X' \leq (1-16^{-6})16^{63}$$

Posons $C = C_1 - 64$

Erreur de troncature

Une variable réelle X appartenant à l'intervalle $[16^{C-1}, 16^{C})$ est écrite par l'ordinateur sous sa forme tronquée :

$$X' = 16^{C} \times (0.M')$$

La mantisse M' a n_0 chiffres hexadécimaux (on suppose une représentation normalisée, de sorte que le premier chiffre de M' est non nul).

L'erreur de troncature e est :

$$e = X - X' \qquad (3)$$

$$e \in [0,\ 16^{C-n_0})$$

L'erreur relative r est :

$$r = \frac{e}{X'} \qquad (4)$$

b) Opérations

La machine garde un chiffre hexadécimal supplémentaire pour faire l'opération pour les additions et les soustractions. Ensuite elle tronque le résultat.

Exemple :

Si la machine fait l'addition X' + Y' avec X' et Y' > 0; X' très supérieur à Y' et si $n_0 = 6$.

$X' = 16^C \times 0.M'$ M' en système hexadécimal s'écrit :

$M' = a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$

$Y' = 16^D \times 0.N'$ $N' = b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$

la machine écrit $Y' = 16^C \times 0.N_1$

avec $N_1 = 0.....b_{6-(C-D)}\ \ b_{7-(C-D)}$

$M' = a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad 0$

En général : $(X' + Y')'$ a même caractéristique que X' et seul $b_{7-(C-D)}$ est tronqué par la machine quand elle garde le résultat, l'erreur de troncature écrite en système hexadécimal s'écrit en général :

$$X' + Y' - (X' + Y')' = 16^{C-6}\ 0.b_{7-(C-D)}\ b_{8-(C-D)}\cdots\cdots$$

elle est donc une erreur par défaut, celle qui est faite sur Y' lorsqu'on le ramène à la caractèristique de X' et qu'on ne garde que les 6 premiers chiffres hexadécimaux.

Il se peut qu'en faisant $M' + N_1$ on passe à la caractéristique supérieure (si 0.M' est assez proche de 1) en ce cas l'erreur sera :

$$X' + Y' - (X' + Y')' = 16^{C+1}\ 0.000000(a_6+b_{6-(C-D)})\ mod\ 16,\ b_{7-(C-D)}\cdots\cdots$$

$$= 16^{C-6} \times [a_6+b_{6-(C-D)}]\ mod\ 16\ ,\ b_{7-(C-D)}\cdots\cdots$$

Autre exemple :

soustraction de nombres positifs avec Y' très inférieur à X' au moins $Y' < 32^{-1} X'$, dans le cas où $n_0 = 6$.

On a encore $M' = a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad 0$

$$N_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{6-(C-D)} b_{7-(C-D)}$$

Si $b_{7-(C-D)} \neq 0$ quand on fait la soustraction on a automatiquement un 1 de retenue au 6ème bit hexadécimal. Le résultat lorsqu'on ne garde que 6 chiffres hexadécimaux est :

$$M' - N_1 = a_1, -, -, -, \text{——}, a_6 - b_{6-(C-D)}{}^{-1},$$

l'erreur écrite en hexadécimal est une erreur par défaut si $b_{7-(C-D)} \neq 0$ en ce cas $X' - Y' - (X'-Y')' = 16^{C-6}[1-0.b_{7-(C-D)} b_{8-(C-D)} \ldots]$.

Si $b_{7-(C-D)} = 0$ l'erreur est dans l'autre sens, elle est $16^{C-7} 0.b_{8-(C-D)} \ldots$ en particulier si $Y' < 16^{C-7}.(X'-Y')' = X'$ erreur par excès.

Conclusion :

En général pour une addition ou une soustraction de deux nombres positifs X' et Y' de caractéristiques C et D avec $Y' < \frac{X'}{32}$ les erreurs de troncatures sont des erreurs par défaut. La seule exception est pour la soustraction le cas où le terme de rang $n_0 + 1 - (C-D)$ de Y' est nul. En particulier si $Y' < 16^{C-n_0-1}$ on a $(X' + Y')' = X'$ et l'erreur est par excès.

Ce que nous avons dit est aussi vrai pour la valeur absolue des nombres lorsque X' est négatif.

Pour une addition ou une soustraction de nombres négatifs X' et Y' de caractéristiques C et D avec $|Y'| < \frac{X'}{32}$ les erreurs de troncatures sont des erreurs par excès. La seule exception est pour la soustraction le cas où le terme de rang $n_0 + 1 - (C-D)$ est nul. En particulier si $-16^{C-n_0-1} < Y' < 0$ on a $(X'-Y')' = X'$ erreur par défaut.

II.2 Evaluation des erreurs de troncature pour un calcul de moyenne

Notre but est d'obtenir une évaluation du biais dû aux troncatures pour le résultat de calculsde simulation qui nous conduisent toujours à des formules analogues à la formule (2). En réalité simplifions encore ce modèle :

Etant donné une suite de variables aléatoires a_n. Nous allons considérer différents algorithmes permettant de calculer un estimateur a de l'espérance des a_n. Afin d'évaluer la précision des estimateurs de a, nous allons calculer l'espérance de l'erreur de troncature.

Considérons d'abord l'algorithme (5) qui permet de calculer la moyenne arithmétique des nombres a_n en un nombre minimum d'opérations.

$$S_0 = 0$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n \text{ , pour } n = 1.... N \qquad (5)$$

$$M_N = \frac{S_N}{N}$$

La représentation de a_n en machine est un nombre flottant tronqué : a'_n.

Le calcul de M_N nécessite N+1 opérations. Pour chaque opération l'erreur de troncature sur le résultat dépend de l'erreur de troncature faite au cours des opérations précédentes. L'erreur de troncature sur S_k est le résultat des erreurs faites sur S_{k-1} sur a_k et sur la $k$ième addition. Au lieu de donner la moyenne arithmétique M_N des a_n, la machine donne un résultat différent M'_N. Nous allons estimer l'erreur cumulée en évaluant :

$$E\,[a - M'_n]$$

(Nous supposerons que les nombres pseudo aléatoires sont assez bons pour que les erreurs dûes au fait que les nombres ne sont pas aléatoires soient négligeables par rapport aux erreurs de troncature).

a) première évaluation du biais pour l'algorithme (5)

De $M_N = \frac{a_1 + \ldots . a_N}{N}$,

on pourrait penser que si R est l'espérance de l'erreur de troncature pour chaque a_i, R sera aussi l'espérance de l'erreur de troncature pour M_N. C'est tout-à-fait faux, et il serait beaucoup plus exact de dire que c'est :

$$\frac{N\,R.}{2}$$

Afin d'expliquer ce processus de propagation des erreurs, calculons une approximation très grossière de $E\,[a-M'_N]$ quand les nombres a_n sont des réels positifs.

Considérons la $i$ème addition faite par le calculateur, S'_i étant le résultat donné par le calculateur pour la somme $\sum_1^i a_j$, pour $1 \leq i \leq n$:

$$S'_i = (S'_{i-1} + a'_i)'$$

Mais $$(S'_{i-1} + a'_i)' = (S'_{i-1} + a_i)'$$

En effet, la troncature de la somme $S'_{i-1} + a_i$ tronquera aussi a_i. Donc :

$$S'_i = (S'_{i-1} + a_i)' \qquad (6)$$

Appelons η_i l'erreur relative faite par le calculateur pour la $i^{ème}$ addition.

$$\eta_i = \frac{(S'_{i-1} + a_i) - S'_i}{S'_i} \qquad (7)$$

Les a_j et les η_i ne sont pas indépendants mais quand i et j sont très différents a_j et η_i ne sont pas très correllés, ainsi en première approximation nous pouvons supposer que les η_i sont indépendants et de même loi, d'espérance R et sont indépendants des a_j.

$$a = E\,(a_j)$$

$$R = E\,[r_i]$$

Théorème (1) : Afin d'expliquer le processus de propagation des erreurs, on fait l'hypothèse que les erreurs relatives de troncature pour la $i^{ème}$ addition sont indépendantes, de même distribution, et indépendantes des nombres a_j, le résultat S'_n de l'algorithme (3) est tel que :

$$E\left[\frac{a - \frac{S'_n}{n}}{a}\right] \sim \frac{(n)}{2} R \qquad (8)$$

Démonstration : De (6) et (7) on déduit :

$$S'_i\,(1+r_i) = S'_{i-1} + a_i$$

$$S'_{i-1}\,(1+r_{i-1}) = S'_{i-2} + a_{i-1}$$

$$\vdots$$

$$S'_1\,(1+r_1) = 0 + a_1$$

En multipliant la 1ère ligne par $\frac{1}{1+r_i}$, la seconde par $\frac{1}{(1+r_i)(1+r_{i-1})}$ et la dernière par $\frac{1}{(1+r_i)\ldots(1+r_1)}$, et en ajoutant terme à terme on obtient :

$$S'_i = \sum_{k=1}^{i} a_k \times \frac{1}{(1+r_i)(1+r_{i-1})\ldots(1+r_k)}$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\prod_{j=k}^{n} (1 + r_j)}$$

Alors de

$$E\left[\frac{a - \frac{S'_n}{n}}{a}\right] = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+R}\right)^{n-j} \qquad (9)$$

on déduit :

$$E\left[\frac{a - \frac{S'_n}{n}}{a}\right] = 1 - \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{1+R}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{1+R}\right)^{n-1}\right]$$

En sommant on obtient la quantité :

$$1 - \frac{1}{n}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1+R}\right)^{n}}{1 - \frac{1}{1+R}}\right] = 1 - \frac{1+R}{nR}\left[1 - (1+R)^{-n}\right]$$

$$= 1 - \frac{(1+R)}{nR}\left[1 - \left(1 - nR + \frac{n(n+1)}{2}R^2 \ldots\ldots\right)\right]$$

$$= 1 - (1+R)\left(1 - \frac{n+1}{2}R \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{n-1}{2}R + \ldots\ldots\ldots$$

Quand n R est petit, (parce que R est petit) ce terme est équivalent à :

$$\frac{n-1}{2}R$$

Ceci est une équivalence formelle qui signifie :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \alpha : \quad \forall n,\ 0 < n\,R < \alpha \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{E\left[\frac{a - M'_n}{a}\right]}{\frac{n-1}{2}R} < 1 + \varepsilon$$

Quand n est assez grand, $\frac{n-1}{2}R$ est équivalent à $\frac{n}{2}R$, d'où l'on déduit la formule (8).

b) Calcul précis de l'espérance de l'erreur

b.1 Supposons d'abord que les a_n sont positifs et ont la même caractéristique :

$$\exists C : \forall n \quad a_n \in [16^{C-1}, 16^{C})$$

Pour ajouter S'_{n-1} et a_n, l'ordinateur les écrit déjà avec la même caractéristique. Soit D la différence entre les deux caractéristiques de S'_{n-1} et de a_n, (leurs caractéristiques respectives étant C + D et C). Pendant l'addition a_n est écrit avec la caractéristique C + D et les n_0+ 1 premiers chiffres de la mantisse sont gardés. Le résultat a en général aussi pour caractéristique C + D et est gardé avec n_0 chiffres. En ce cas l'erreur de troncature est la même que l'erreur faite sur a_n lorsqu'on ne garde que n_0-D chiffres de la mantisse initiale.

Définissons le nombre e_D :

e_D est l'espérance de l'erreur faite sur a_n quand les n_0-D premiers chiffres de la mantisse normalisée sont seulement gardés. La relation importante est :

si S'_{n-1} et $S'_n \in [16^{C+D-1}, 16^{C+D})$

$$E(S'_n) = E(S'_{n-1}) + (a - e_D) \qquad (10)$$

Définissons le nombre n_D :

Soit n_D le nombre pour lequel S'_{n_D} a pour caractéristique C + D, alors que S'_{n_D-1} avait pour caractéristique C + D - 1. n_D peut être défini par :

$$S'_{n_D-1} \in [16^{C+D-2}, 16^{C+D-1})$$

$$S'_{n_D} \in [16^{C+D-1}, 16^{C+D})$$

Alors tant que :

$$S'_n \in [16^{C+D-1},\ 16^{C+D})$$

qui peut s'écrire :

$$n_D < n < n_{D+1}$$

on a $$E(S'_n) = E\,S'_{n_D} + (a - e_D)(n - n_D) \qquad (11)$$

$E[S'_n]$ *décrit* n_0 *segments de droite, lorsque n augmente, dont les pentes sont décroissantes.* (en effet e_D augmente avec D), voir figure 1.

Si $D < n_0$, $\quad e_D < a$

Si $D = n_0$, tous les chiffres de a_n sont tronqués, S'_n reste constant. On peut donc écrire $e_{n_0} = a$. Donc quand n est assez grand, $D = n_0$ et il existe une constante C_2 inférieure à 16^C, telle que :

$$\forall n > n_{n_0}$$

$$S'_n = 16^{n_0 + C-1} + C_2$$

De $M_N = \dfrac{S'_N}{N}$ on déduit :

$E[M'_N]$ décrit n_0 branches d'hyperboles quand N croît. La dernière branche de M'_N est exactement une hyperbole (figures 2 et 3).

Il n'est pas facile de calculer l'espérance de l'erreur faite au cours de la $n_D^{\text{ième}}$ opération, en effet S'_{n_D} et S'_{n_D-1} n'ayant pas la même caractéristique, ce n'est plus seulement a_{n_D} qui est tronqué, mais c'est aussi S'_{n_D-1}, dont les chiffres ont une répartition difficile à connaître. Mais cela n'a pas d'importance, en effet le nombre d'opérations correspondant à une erreur d'espérance e_D, donc à une somme comprise entre 16^{C+D-1} et 16^{C+D} est :

$$n_{D+1} - n_D = \frac{16^{C+D} - 16^{C+D-1}}{a - e_D} = \frac{15 \times 16^{C+D-1}}{a - e_D}$$

Ce nombre est donc de l'ordre de $15 \times 16^{C+D-1}$, on connait l'espérance de l'erreur pour toutes ces valeurs de n :

$$n_D \leq n < n_{D+1}$$

sauf pour la première. On peut la prendre égale à e_D.

On peut donc évaluer $E[S'_n]$ avec une très minime approximation par l'algorithme suivant :

Algorithme 12 :

Calculer les valeurs de n_D *pour* $D = 1, \ldots . n_0$

$$n_D = \sum_{B=1}^{D-1} \frac{15 \times 16^{C+B}}{a - e_B} \qquad (12\text{-}1)$$

Calculer les valeurs de l'erreur E_D *cumulée pour les différents* n_D

(*Remarque* : $E_D = n_D\, a - E(S'_{n_D})$)

$$E_D = \sum_{B=1}^{D-1} \frac{15 \times 16^{C+B}}{a - e_B} e_B \qquad (12\text{-}2)$$

$E(S'_n)$ *est défini par* :

si $\exists\, D < n_0$: $n_D \leq n < n_{D+1}$ $\qquad E(S'_n) = n\, a - E_D - e_D\,(n - n_D)$

si $n > n_{n_0}$ $\qquad E(S'_n) = 16^{n_0+C-1} + \frac{a}{2}$ $\qquad (12\text{-}3)$

Remarque : pour un calculateur travaillant en système binaire, les résultats sont similaires : quand la mantisse a n_0 bits, il y a n_0 branches d'hyperboles.

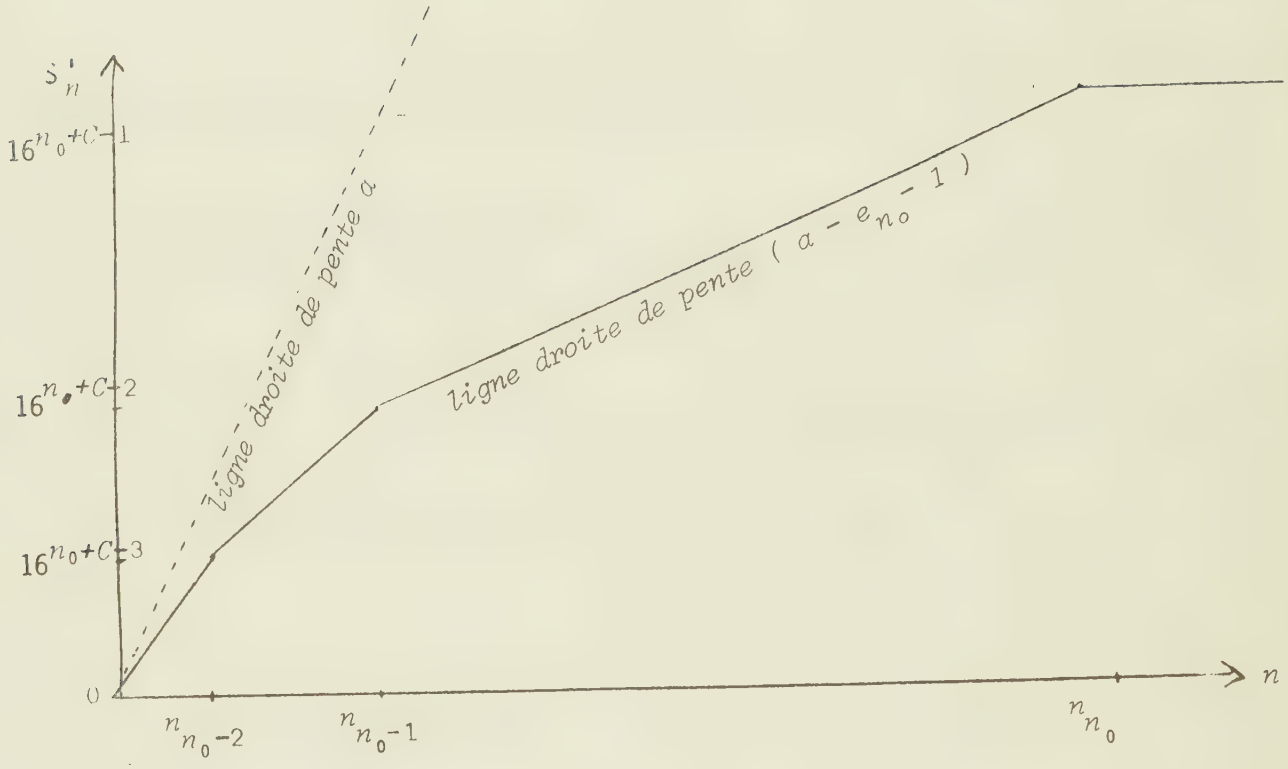


Fig. 1

Forme des courbes donnant S'n en fonction de n.

Remarque : L'échelle n'est évidemment pas linéaire.

L'algorithme (12) peut être calculé facilement mais dans la suite ce que nous retiendrons est surtout le système (11), et le fait que dans de grands intervalles de variations de n, (chaque intervalle $[n_D, n_{D+1}]$ étant 16 fois plus grand que les précédents) il existe des constantes A_D, B_D et C_D telles que :

$$E[S'_n] = A_D + (a - e_D)\, n$$
$$n\, a - E[S'_n] = - A_D + n\, e_D \qquad (13)$$
$$\forall n \in [n_D, n_{D+1}),\quad E[a - M'_N] = B_D/n + e_D$$

Remarque : le terme important est e_D. On ne doit pas oublier que e_D étant une fonction de D, est en fait une fonction de n.

b.2 première généralisation : supposons que l'intervalle de variation de a_n soit inclus dans un intervalle $[16^{C-k}, 16^C)$. Dès que S'_n devient supérieur à 16^C, on peut définir une constante e_D telle que le système (12) soit valide.

Définition 2 : e_D est l'espérance de l'erreur de troncature faite sur a_n quand il est écrit avec la caractéristique C + D et qu'on ne garde que les n_0 premiers chiffres de la mantisse. C'est cette définition qui sera utilisée dans la suite.

En conséquence, les équations (10) à (13) sont valables pour des nombres a_n positifs appartenant à un intervalle fini, quelle que soit leur distribution. On cherche les entiers C et k, tels que l'intervalle de définition des a_n soit inclus dans $[16^{C-k}, 16^C)$, et on utilise la définition 2 de e_D.

Théorème (2) : Pour des nombres a_n positifs, répartis dans un intervalle borné, les espérances des résultats S'_n et M'_n de l'algorithme (5) décrivent respectivement n_0 segments de droites, et n_0 branches d'hyperboles, qui peuvent être obtenues à partir des équations (12), en utilisant la définition (2) pour e_D.

b.3 calcul de e_D : quand l'intervalle de définition des a_n est inclus dans $[16^{C-k}, 16^C)$. On peut subdiviser l'intervalle de définition en sous-intervalles dont les extrémités sont des nombres dont la mantisse a n_0 chiffres, quand ils sont écrits avec la caractéristique C + D : x_1, x_2, ... x_p. En fait nous avons besoin pour inclure l'intervalle de définition de la réunion des intervalles : $[x_0, x_1), \ldots [x_i, x_{i+1}) \ldots [x_p, x_{p+1})$

x_0 et x_{p+1} peuvent se trouver en dehors de l'intervalle de définition.

Supposons que les a_n aient une densité de probabilité $f(x)$:

$$e_D = \sum_{m=0}^{p} \int_{x_m}^{x_{m+1}} (x - x_m)\ f(x)\ dx \qquad (14)$$

Si $f(x)$ est continue on peut appliquer la formule de la moyenne. Il est possible de trouver une suite (ξ_m), telle que :

$$\xi_m \in (x_m, x_{m+1}) \quad \text{et}$$

$$e_D = \sum_{m=0}^{p} f(\xi_m) \int_{x_m}^{x_{m+1}} (x - x_m)\ dx$$

$$e_D = \sum_{m=0}^{p} f(\xi_m)\ \frac{(x_{m+1} - x_m)^2}{2}$$

et comme :

$$x_{m+1} - x_m = 16^{C+D-n_0}$$

$$e_D = \frac{16^{C+D-n_0}}{2} \left[\sum_{m=0}^{p} f(\xi_m)\ (x_{m+1} - x_m) \right]$$

Il est bien connu que lorsque la distance $|x_{m+1} - x_m|$ tend vers 0 , la somme de Darboux est équivalente à l'intégrale de $f(x)$, qui vaut 1.

En conséquence, quand D est petit, e_D est à peu près $\frac{16^{C+D-n_0}}{2}$, quelle que soit la distribution des a_n.

Ceci est ,bien sûr , faux quand D est grand , et en particulier $e_{n_o} = a$.

b.4 Exemples de calcul de e_D

* Si les a_n sont tels que tous les chiffres tronqués ont une distribution uniforme, on a exactement :

$$e_D = \frac{16^{C+D-n_0}}{2}$$

* Si $n_0 = 6$ et si les a_n sont équidistribués dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$

$$\alpha = 16^C\ (0.\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6) \quad \text{et} \quad \beta = 16^C(0.\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6)$$

$$avec\ \alpha < \beta$$

De (14) on déduit :

$$e_D = \frac{16^{2C+D-6}}{2(\beta-\alpha)} \left[0.\beta_1 \ldots . \beta_{6-D} - 0.\alpha_1 \ldots . \alpha_{6-D} + 16^{D-6} \{ (0.\beta_{7-D} \ldots \beta_6)^2 + 1-(0.\alpha_{7-D} \ldots . \alpha_6)^2 \} \right]$$

b.5 Seconde généralisation

Ce que nous avons dit jusqu'à présent était valable lorsque les a_n étaient tous > 0. Lorsque les a_n sont tous négatifs, le raisonnement est le même, les calculs aussi, les erreurs sont des erreurs par défaut pour les valeurs absolues. Par contre, lorsque les a_n sont alternativement positifs et négatifs, le biais est plus faible. Si les a_n ont une espérance nulle, le biais est nul. Si cette espérance est $\neq 0$, les calculs que nous avons fait deviennent justes à partir du moment où n est assez grand pour que la moyenne des n premiers a_n soit de signe constant, avec une probabilité forte.

Par exemple si les nombres a_n d'espérance 2, sont répartis dans l'intervalle $[-2,+6]$, à moins d'une distribution vraiment spéciale, la probabilité pour que la moyenne arithmétique des n premiers nombres a_n, soit positive, pour $n \geq 100$, est très forte.

Théorème (3) : Si les nombres a_n sont alternativement positifs ou négatifs, mais répartis dans un intervalle borné, les résultats du théorème (2) s'appliquent dès que la moyenne arithmétique des n premiers nombres a_n a un signe constant avec une forte probabilité.

II.3 Methodes proposées pour réduire le biais , et , résultats experimentaux comparés .

Pour mémoire, citons :

- l'utilisation d'une précision étendue, cela ne fait que déplacer le problème, le principe restant le même, d'autre part cela pose des problèmes de place mémoire et de coût pour les simulations compliquées.
- faire le calcul en entier lorsque celà est possible, mais c'est rare. Il se pose alors un problème de validité du modèle nous en verrons un exemple au chapitre VI.
- imposer à la machine de faire des erreurs d'arrondis et non de troncature. Il faudra refaire les calculs d'erreurs dans ce cas.

Quatre méthodes vont maintenant être discutées dans le but de réduire le biais pour 1' algorithme (5).

a) Méthode 1

Séparer la durée de la simulation en P' *tranches de durée* P, *faire les moyennes pour chaque tranche, puis la moyenne des moyennes.* Cette méthode est naturelle, étant très utilisée pour le calcul de l'intervalle de confiance [43].

Par exemple, il semble raisonnable quand on veut calculer M_N de choisir :

$$P' = P = \sqrt{N}$$

Dès que P < N/16, on peut être sûr que l'erreur sera très différente, car on n'utilisera pas la même hyperbole. Ceci bien sûr est seulement vrai si P et N ne sont pas trop grands et ne donnent pas tous les deux des points appartenant à la dernière hyperbole. En ce cas, nous avons vu que le résultat n'a pas de signification du tout.

Les temps de calcul et les places-mémoires sont similaires pour cette méthode et pour la méthode classique.

Faisons un bilan des méthodes qu'on peut trouver dans la littérature et dont l'idée générale est la même :

Méthode de LINZ :

L'idée est de diviser la durée totale de la simulation en 2 tranches. Chaque tranche étant divisée en 2 tranches.....LINZ [78] définit des sommes intermédiaires S_{ij} :

$$S_{io} = a_i, \text{ pour } i = 1, 2, ..n$$
$$S_{ij} = S_{2i,j-1,} + S_{2i-1,j-1}, \text{ pour } i = 1,2,..\frac{n}{2} \text{ et } j = 1, 2,...k,$$
$$S = S_{1k}$$

Mais LINZ lui-même mentionne deux défauts :

- cet algorithme est plus difficile à programmer que l'algorithme classique
- il est très difficile à utiliser si tous les nombres ne sont pas accessibles au début de la sommation.

Un autre algorithme fut proposé par WALKER [79] pour améliorer celui de LINZ et pour diminuer la place mémoire nécessaire. Il consiste à faire la somme $a_1 + a_2$, puis la somme $a_3 + a_4$, puis la somme s_1 de ces deux sommes partielles, puis la somme $a_5 + a_6$, la somme $a_7 + a_8$, et la somme s_2 des sommes partielles , ensuite on fait $s_1 + s_2$.... C'est la méthode de LINZ mais les opérations sont faites dans un ordre différent.

Méthode des accumulateurs en cascade :

WOLFE [80] et ROSS [81] ont décrit cette méthode : ils proposent d'utiliser des accumulateurs dans lesquels ils mettent les sommes correspondant à chaque ordre de grandeur. Cette méthode utilise un programme difficile et une grande place mémoire. KAHAN [82] donne un algorithme qui semble améliorer beaucoup cette méthode :

```
1   S=0.0
    S2=0.0
2   DO 4 I=1,N
3   Y1=....
13  S2=S2+Y1
    T=S+S2
23  S2=(S-T)+S2
4   S=T
5.....
```

GREGORY [83] compare les algorithmes de WALKER et de KAHAN.

b) Méthode 2 : corriger les résultats à l'aide du calcul du biais.

Quand le coefficient e_D peut être calculé , les équations (12) peuvent être utilisées pour obtenir une bonne approximation de

$$E\,[N\alpha - S'_N] = F.$$

La correction est la suivante :

$$a_{corrigé} = \frac{M'_N}{1-F/N} \qquad (15)$$

Supposons par exemple, que l'on veuille tester un grand nombre de nombres pseudo-aléatoires, qu'on souhaiterait équidistribués dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Des estimations des moments seront calculées. On fera les corrections nécessaires en utilisant les équations (12) et (15).

On doit estimer la variance de S'_N, afin d'obtenir un intervalle de confiance pour l'estimateur de a. Mais un tel calcul est malheureusement difficile à cause des corrélations existant entre les erreurs dûes aux troncatures et les écarts dûs à la lenteur de la convergence de l'estimateur.

c) Méthode 3 : centrer les résultats

Lorsqu'on utilise la méthode classique pour une suite de *nombres de moyenne nulle*, l'erreur est en général par défaut lorsque la somme est positive et par excès lorsque la somme est < 0. *Les erreurs de troncatures tendent donc à nous faire trouver une moyenne nulle plus rapidement que celle qu'on aurait sans erreur de troncature.* (Il est un peu artificiel de se réjouir du résultat; en effet, lorsqu'on veut estimer la moyenne de nombres a_n, c'est en général parce que cette moyenne est inconnue et on n'est pas sûr qu'elle va être nulle).

La conséquence de ce phénomène est qu'il *est préférable de faire des opérations avec des nombres à peu près centrés.*

Une méthode qui semble bonne pour réduire le biais est la méthode suivante : faire un premier passage, on obtient une première évaluation de la moyenne : $S_N^{(1)}$, puis faire un deuxième passage pour avoir la moyenne des $a_i - S_N^{(1)}$; on obtient $S_N^{(2)} - S_N^{(1)}$. Si cette différence est notable on peut recommencer l'opération. Sinon, on prend $S_N = S_N^{(2)}$.

La méthode la meilleure serait évidemment une *méthode mixte* entre ces trois méthodes. Nous l'appelerons :

d) Méthode 4

On fait plusieurs passages pour presque centrer les résultats, pour chaque passage on fait des tranches de durées proches de $\sqrt{N}$ et on corrige le résultat si possible.

Pour des simulations de processus compliqués, même s'il est trop coûteux de faire plusieurs passages, il semble raisonnable d'estimer rapidement l'ordre de grandeur de la moyenne sur les premiers nombres (par exemple sur quelques centaines) ce qui oblige à stocker ces nombres en mémoire : on prend cette valeur comme nombre $S_N^{(1)}$, on décale alors tous les nombres de cette valeur et on fait un seul passage, en séparant en tranches d'une longueur de l'ordre de $\sqrt{N}$ et en corrigeant éventuellement le résultat, (si on sait faire le calcul de l'espérance de l'erreur de troncature).

Remarque :

Pour les simulations de processus compliqués, les erreurs de troncature sont nombreuses. Elles interviennent pour chacune des nombreuses opérations. Il y a beaucoup d'autres opérations que celles du calcul de la moyenne des résultats. Il est essentiel de séparer en tranches.

Résultats expérimentaux :

Les différents tests expérimentaux ont été réalisés sur des nombres pseudo-aléatoires décrivant les intervalles [4.8 ;5.2] ou [-0.2;0.2]. La précision de l'ordinateur, en simple précision étant d'environ 10^{-7}, nous avons fait des estimations des moyennes pour $N \leq 10^7$. Nous avons utilisé un générateur multiplicatif

$$b_n = \frac{[b_{n-1} \times 695539] \; mod \; (2^{31})}{2^{31} - 1}$$

$$b_0 = 13$$

on a alors soit $a_n = \frac{2}{5} b_n + 4.8$

soit $a_n = \frac{2}{5} b_n - 0.2$

Discussion des différentes méthodes

Méthode classique :

Les résultats pour $a_n \in [4.8;5.2]$ sont rassemblés sur le tableau 1. Pour D compris entre 1 et 6, les valeurs de $E[e_D]$ obtenues par la formule (14) sont comparées à leur estimation expérimentale

$$a - \left[\frac{S'_{n_{D+1}} - S'_{n_D}}{n_{D+1} - n_D} \right]$$

(en effet entre n_D et n_{D+1}, e_D ne dépend pas de n). On voit pour D ≥4 l'accord excellent entre la valeur observée et celle donnée par (14). L'accord moins bon pour D ≤ 3 est dû aux faibles valeurs de $n_{D+1} - n_D$: l'écart dû au caractère aléatoire du processus devient important. Ceci apparaît aussi sur les courbes (2) et (3).

Donc pour des valeurs de n assez grand pour que les écarts dûs au caractère aléatoire du processus soient négligeables devant les écarts dûs aux troncatures, la méthode 2 (formule (15)) serait assez correcte.

Les résultats comparatifs sont donnés sur le tableau 2.

La méthode 1 conduit à des résultats assez corrects pour des tranches dont la longueur est de l'ordre de $\sqrt{N}$.
Au chapitre III nous présenterons les figures (4) à (13) redonnant les résultats des simulations présentées au chapitre I, dans le cas de l'utilisation de la méthode (1). Les résultats sont probants.
La méthode 3 est justifiée par le fait qu'il apparaît nettement que le résultat n'est pas biaisé lorsque les nombres sont centrés : $a_n \in [-0.2, +0.2]$.

Les résultats de la méthode 4 montrent que dès la fin du deuxième passage on obtient un résultat identique à celui obtenu en précision étendue.

Nous avons présenté des méthodes 1, 2, 3 et 4 qui si elles peuvent être utilisées sont bien meilleures que la méthode classique. En particulier la méthode mixte (4) est la meilleure.

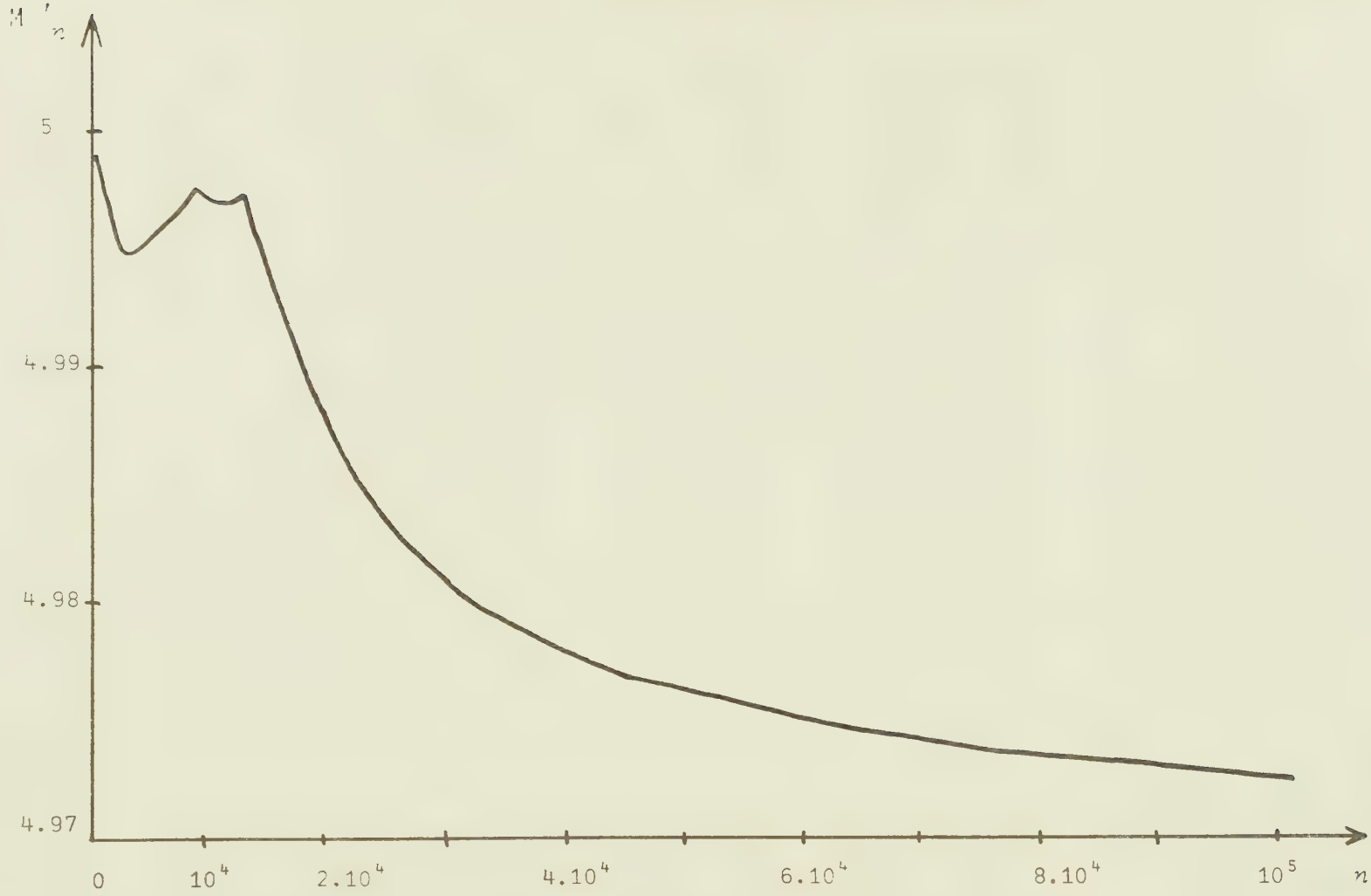


Fig. 2

Variations de M'_n *en fonction de* n . L' échelle permet de voir les courbes correspondant à D=3 et D=4

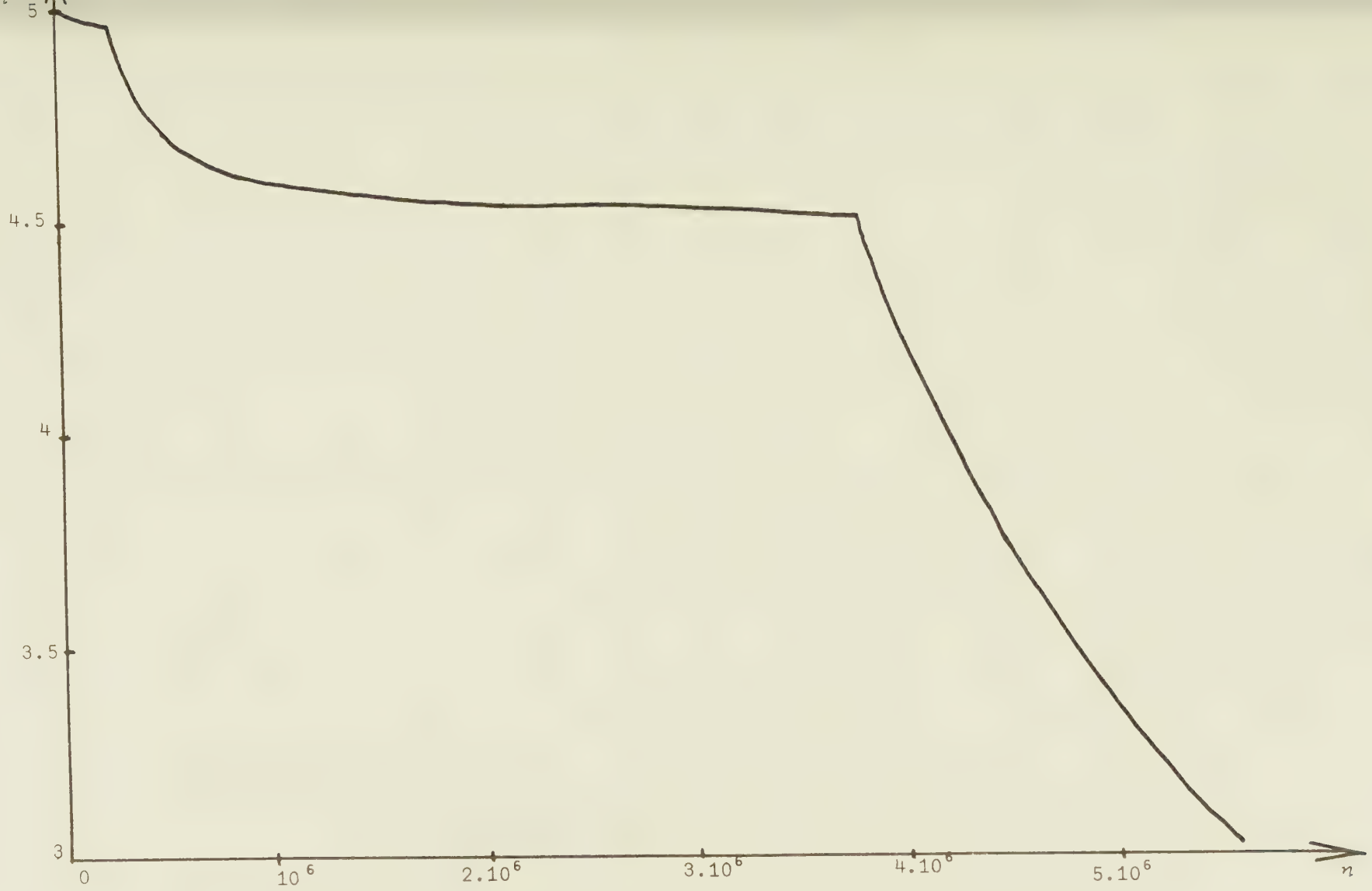


Fig. 3 *Variations de* M'_n *en fonction de* n . L' échelle permet de voir les courbes correspondant à D=4,5, ou 6.

Tableau 1 : méthode classique $a = 5$

D	n_D	M'_{n_D}	$n_{D+1} - n_D$ nombre d'éléments intervenant pour l'évaluation expérimentale de e_D	e_D relation (13)	$a - \frac{S'_{n_{D+1}} - S'_{n_D}}{n_{D+1} - n_D}$ évaluation expérimentale de e_D
1	4	4 . 939	48	$7 . 63 \quad 10^{-6}$	10^{-1}
2	52	5 . 013	768	$1 . 22 \quad 10^{-4}$	$4 \quad 10^{-4}$
3	820	4 . 99734	12296	$1 . 95 \quad 10^{-3}$	$3 . 11 \quad 10^{-3}$
4	13116	4 . 99684	197845	0 . 3133508	0 . 3134674
5	210961	4 . 970	3494575	0 . 5	0 . 4990929
6	3705536	4 . 527	quelconque	5	5

Tableau 2

	$n = 10^3$	$n = 10^5$	$n = 10^6$	$n = 5.10^6$	$n = 10^7$
méthode classique	4.998	4.9726	4.600	3.355	1.677
double précision	4.998	5.00001	5.00001	5.00009	5.000041
nombres de moyenne nulle	$- 1.46 \times 10^{-3}$	1.6×10^{-5}	$1.65\ 10^{-4}$	$4.2\ \ 10^{-5}$	$1.02\ \ 10^{-4}$
méthode 1					
tranches de 500		4.9998	4.9992	4.9961	4.9929
tranches de 1000		4.9995	4.9993	4.9968	4.9943
tranches de 1500		4.949	4.9993	4.9964	4.9945
tranches de 2000		4.9987	4.9987	4.9973	4.9959
tranches de 2500		4.9986	4.9986	4.9976	4.9965
tranches de 3000		4.9485	4.9935	4.9957	4.9963
tranches de 3500		4.898	4.986	4.9957	4.9966
tranches de 4000		4.998	4.9984	4.9978	4.9970
tranches de 4500		4.948	4.9934	4.9972	4.9966
tranches de 5000		4.998	4.9984	4.9978	4.9972
tranches de 10000		4.998	4.998	4.998	4.9976
tranches de 15000		4.495	4.9976	4.989	4.989

Méthode 4 avec P = 3000)

$S^{(1)}_{10^7} = 4.9963$ $S^{(2)}_{10^7} = 5.00004$ $S^{(3)}_{10^7} = 5.00004$ $S^{(4)}_{10^7} = 5.00004$

II.4 D' autres algorithmes itératifs .

Etant donné une suite de nombres a_n dont on veut estimer la moyenne. Nous avous vu au II.3 qu'il était préférable de séparer la suite en tranches et de faire la moyenne dans chaque tranche et ensuite de faire la moyenne des moyennes précédentes. Nous avons vu aussi qu'il serait souhaitable pour le calcul de la moyenne dans chaque tranche de presque centrer les a_n mais cela coûte trop cher. Nous allons chercher des algorithmes qui réduisent le biais. Pour remplacer (5) ou (5') :

$$(5') \quad \begin{cases} M_1 = a_1 \\ M_n = \frac{n-1}{n} M_{n-1} + \frac{a_n}{n} \end{cases}$$

qui sont équivalents du point de vue des erreurs de troncature, ($\frac{a_n}{n}$ étant aussi petit devant $\frac{n-1}{n} M_{n-1}$ que a_n devant S_n) nous allons étudier d'autres algorithmes de la forme suivante :

$$(16) \quad \begin{cases} M_1 = a_1 \\ M_n = M_{n-1} + \mu_n (a_n - M_{n-1}) \end{cases}$$

Cet algorithme a été suggéré par C. MACCHI [86]. Deux procédures vont être considérées.

$$* \quad (17) \qquad \mu_n = \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire

$$M_n = M_{n-1} + \frac{1}{n}(a_n - M_{n-1})$$

Cet algorithme est mathématiquement équivalent à l'algorithme (5).

$$* \quad (18) \qquad \mu_n = \frac{1}{n} \text{ si } n \leq N, \ \mu_n = \frac{1}{N} \text{ si } n > N$$

Posons :

$$b_n = \mu_n (a_n - M'_{n-1})$$

Remarquons que lorsque l'espérance des a_n n'est pas nulle, les nombres b_n deviennent vite très petits par rapport à S_{n-1} et l'erreur de troncature faite sur b_n :

$$b_n - b'_n$$

peut être négligée par rapport à l'erreur de troncature faite pour l'opération :

$$M_{n-1} + b_n$$

Remarquons aussi que la caractéristique C *de* M_{n-1} *devient vite constante quand* C *augmente.*

Justification de l'utilisation de cet algorithme : b_n est très vite petit devant M'_{n-1} . Pendant assez longtemps, que b_n soit positif ou négatif, la machine va faire des erreurs par défaut. Cependant on prévoit que l'erreur faite par la machine pour l'algorithme (16) est inférieure à celle qui est faite pour l'algorithme (5) en effet

lorsque M'_{n-1} est une sous estimation de M_{n-1}, $a_n - M'_{n-1}$ est une surestimation de $a_n - M_{n-1}$ donc b_n est une surestimation de $\mu_n(a_n - M_{n-1})$ et l'algorithme corrige un peu l'erreur de troncature.

Reprenons le mécanisme des additions et des soustractions.

* $|b_n| < 16^{C-n_0-1}$ $\quad M'_n = M'_{n-1}$

si $b_n > 0$ erreur par défaut

si $b_n < 0$ erreur par excès.

* pour $16^{C-n_0-1} < |b_n| < 16^{C-n_0}$ on a :

si $b_n > 0$ $\quad M'_n = M'_{n-1}$

si $b_n < 0$ $\quad M'_n = M'_{n-1} - 16^{C-n_0}$

* pour $|b_n| > 16^{C-n_0}$ on a :

si $b_n > 0$ les chiffres tronqués sont ceux de rang supérieur ou égal à $n_0 + 1 - C$. Si tous les chiffres ont une répartition uniforme l'espérance de l'erreur est $\frac{16^{C-n_0}}{2}$.

si $b_n < 0$ reprenons les résultats de II.1. considérons les chiffres de b_n écrit avec la caractéristique C :

$$b_n = 16^C \ (0.b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n_0} \ldots\ldots)$$

si $b_{n,n_0} \neq 0$ l'erreur est :

$$16^{C-n_0} \ (1 - 0.b_{n,n_0}, b_{n,n_0+1} \ldots.)$$

si $b_{n,n_0} = 0$ l'erreur est une erreur par excès

$$16^{C-n_0+1} \ (0.b_{n,n_0+1}, b_{n,n_0+2} \ldots.)$$

Si tous les chiffres de b_n ont une répartition uniforme l'espérance de l'erreur est :

- si nous conditionnons par une valeur de $b_{n,n_0} \neq 0$

$$16^{C-n_0} \ (1 - \frac{b_{n,n_0}}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{16})$$

- si nous conditionnons par une valeur de $b_{n,n_0} = 0$

$$16^{C-n_0} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$$

Donc l'espérance de l'erreur est en ce cas :

$$16^{C-n_0} \left[\frac{1}{16} \sum_{b=1}^{15} (1 - \frac{b}{16} - \frac{1}{32}) - \frac{1}{16} \times \frac{1}{32}\right] =$$

$$16^{C-n_0} \left[\frac{15}{16} \times \frac{31}{32} - \frac{15 \times 16}{16 \times 16 \times 2} - \frac{1}{16 \times 32}\right] =$$

$$\frac{16^{C-n_0}}{2} \ (\frac{7}{8})$$

Le fait important est surtout le suivant: lorsque $|b_n|$ reste inférieur à 16^{C-n_0-1}, *l'algorithme donne un résultat constant*.

Pour (17) $\mu_n = \frac{1}{n}$ l'expérience montre que M'_n décroit assez vite et si les variations de a_n ne sont pas trop importantes $a_n - M'_{n-1}$ devient assez vite plus souvent positif que négatif et M'_n devient constant à partir du moment où $b_n < 16^{C-n_0}$

a) Calcul de l'espérance de l'erreur due aux troncatures dans le cas où l'algorithme utilisé est

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= a_1 \\ M_n &= M_{n-1} + \frac{1}{n}(a_n - M_{n-1}) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

la suite des nombres a_n est une suite de nombres équirépartis dans un intervalle $[\alpha,\beta]$ avec $0 < \alpha < \beta$

$$\beta - \alpha = d$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = a$$

Posons

$$\varepsilon = 16^{C-n_0}$$

$$\Theta = \frac{2\varepsilon}{d}$$

$$\eta = \frac{15}{16}\,\frac{\varepsilon^2}{d}$$

$$\Theta' = \frac{\varepsilon}{d}$$

$$\eta' = \frac{1}{16}\,\frac{\varepsilon^2}{d}$$

Pour chaque valeur de n, M'_{n-1} étant donné, pour calculer l'espérance de l'erreur faite au cours de la $n^{\text{ième}}$ opération, compte tenu de la répartition de la variable a_n, 3 intervalles sont à considérer :

1) $|a_n - M'_{n-1}| > \varepsilon\, n$

2) $n\,\frac{\varepsilon}{16} < |a_n - M'_{n-1}| < \varepsilon\, n$

3) $|a_n - M'_{n-1}| < n\,\frac{\varepsilon}{16}$

Premier cas

Au début n étant petit, M'_{n-1} a une probabilité forte de se trouver suffisamment à l'intérieur de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ pour que $M'_{n-1} + n\,\varepsilon$ et $M'_{n-1} - n\,\varepsilon$ y soient aussi. Le schéma est donc le suivant :

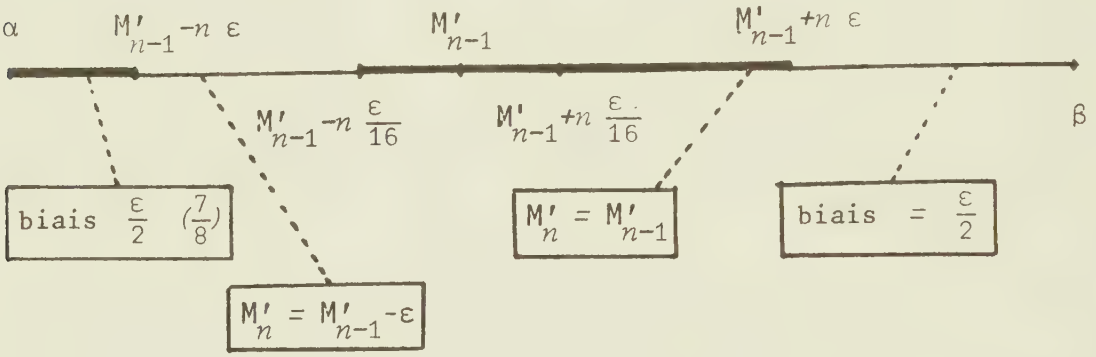


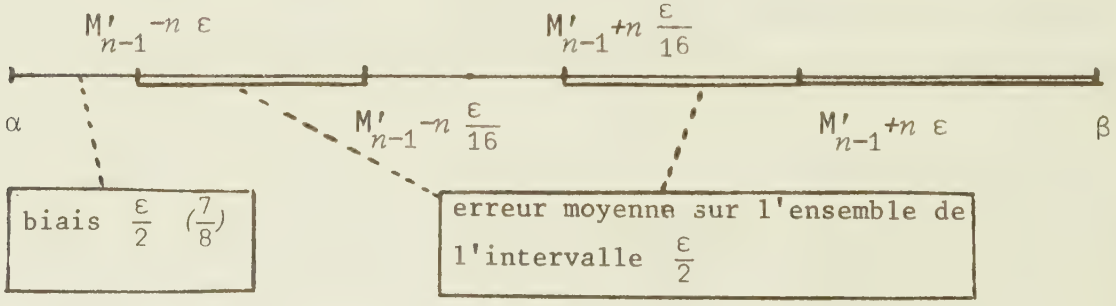
schéma 1

Pour une répartition de a_n dans l'intervalle $\left[M'_{n-1} - n\,\frac{\varepsilon}{16}\,,\ M'_{n-1} + n\,\frac{\varepsilon}{16}\right]$ qui est symétrique le biais est nul.

Pour la réunion des intervalles :

$$\left[M'_{n-1} - n\,\varepsilon\,,\ M'_{n-1} - n\,\frac{\varepsilon}{16}\right] \cup \left[M'_{n-1} + n\,\frac{\varepsilon}{16}, M'_{n-1} + n\,\varepsilon\right]$$

le biais est $\frac{\varepsilon}{2}$, en effet on a deux intervalles symétriques où l'erreur est soit b_n, soit $b_n + \varepsilon$.



Finalement l'espérance de l'erreur au cours de la $n^{\text{ième}}$ opération conditionnée par une valeur donnée de M'_{n-1} est, tant que le schéma 1 reste valable :

$$E\left[e_n | M'_{n-1}\right] = \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{2n}{d}\,\frac{\varepsilon}{16} - \frac{1}{8}\,\frac{(M'_{n-1} - n\,\varepsilon - \alpha)}{d}\right]$$

$$E\left[e_n | M'_{n-1}\right] = \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{1}{16} + \frac{a - M'_{n-1}}{8d}\right] \tag{19}$$

De (17) on déduit :

$$E\left[M'_n\right] = \left[1 - \frac{1}{n}\right] E\left[M'_{n-1}\right] + \frac{E[a_n]}{n} - E[e_n]$$

$$E\left[M'_n\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E\left[M'_{n-1}\right] + \frac{a}{n} - \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{1}{16} + \frac{a - E[M'_{n-1}]}{8d}\right]$$

$$E\left[a - M'_n\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E\left[a - M'_{n-1}\right] + \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8d}\,E\left[a - M'_{n-1}\right]\right] \tag{20}$$

Posons :

$$\zeta_n = E\left[a - M'_n\right]$$

(20) peut s'écrire :

$$\zeta_n = \zeta_{n-1}\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{16d}\right] + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right) \tag{21}$$

De plus on a : $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$

La relation (21) nous montre que ζ_n est un polynôme de degré n en ε (dont le terme de plus bas degré est en ε)

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,i}\,\varepsilon^i$$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{n,1} = \alpha_{n-1,1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ \alpha_{n,i} = \alpha_{n-1,i}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \alpha_{n-1,i-1}\,\frac{1}{16d} \end{cases}$$

Par suite on pourra calculer itérativement les approximations d'ordre i en ε pour l'espérance de l'erreur.

$$n\,\alpha_{n,1} = (n-1)\,\alpha_{n-1,1} + \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

- -

$$\alpha_{1,1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

La somme des précédentes relations donne :

$$n\,\alpha_{n,1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)\sum_{i=1}^{n} i$$

Soit $\alpha_{n,1} = \frac{n+1}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right)$

Ainsi au premier ordre on trouve :

$$(22)\quad E^{(1)}\left[a-M'_n\right] = \frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right)(n+1)$$

Calculons le terme au deuxième ordre :

$$\alpha_{n,2} = \alpha_{n-1,2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{n}{64d}\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

Donc

$$\begin{cases} n\,\alpha_{n,2} = (n-1)\,\alpha_{n-1,2} + \dfrac{n^2}{64d}\left(1-\dfrac{1}{16}\right) \\ - \\ 2\,\alpha_{2,2} = 0 + \dfrac{2^2}{64d}\left(1-\dfrac{1}{16}\right) \end{cases}$$

On en tire :

$$n\,\alpha_{n,2} = \frac{1}{64d}\left(1-\frac{1}{16}\right)\left[\sum_{?}^{n} i^2\right]$$

$$\alpha_{n,2} = \frac{1}{64d}\left(1-\frac{1}{16}\right)\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n}\right]$$

L'erreur au deuxième ordre vaut alors :

$$E^{(2)}\left[a-M'_n\right] = \frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right)\left\{(n+1) + \frac{\varepsilon}{16d}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n}\right]\right\}$$

qui pour n assez grand donne :

$$(23)\quad E^{(2)}\left[a-M'_n\right] = \frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right) n \left(1+\frac{n\,\varepsilon}{48d}\right)$$

On pourrait calculer de même les erreurs à des ordres supérieurs en ε.

Le schéma 1 reste valable tant que n n'est pas trop grand, de sorte que :

$$M'_{n-1} - n\,\varepsilon > \alpha$$

Ceci peut s'écrire $n < n_1$, n_1 étant la valeur de n pour laquelle il y a égalité :

$$M'_{n_1-1} - n_1\,\varepsilon = \alpha$$

On peut calculer une estimation N_1 de n_1 en le définissant par :

$$E\left[M'_{N_1-1}\right] = N_1\,\varepsilon + \alpha$$

N_1 étant grand nous allons en fait le définir par :

$$E\left[M'_{N_1}\right] = N_1\,\varepsilon + \alpha$$

Le calcul précédent donne au 2ème ordre en ε :

$$E\left[a-M'_{N_1}\right] = \frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right) N_1 \left(1+\frac{N_1\varepsilon}{48d}\right)$$

En posant $x = \frac{N_1\varepsilon}{d}$ il vient :

$$x^2 + \frac{79\times 48}{15}\,x - \frac{32\times 48}{15} = 0$$

(22') $$x = 0.404 = \frac{N_1 \varepsilon}{d}$$

Dans ces conditions $\frac{N_1 \varepsilon}{48d} = \frac{1}{120}$ *donc on peut absolument négliger les contributions d'ordre supérieur* ε et utiliser la formule (22)

$$E\left[M'_{N_1}\right] = a - 0.095\, d$$

application au cas $a = 5 \qquad \alpha = 4.8 \qquad \beta = 5.2 \qquad n_0 = 6$

$$N_1 = 16.9 \times 10^4 \qquad E\left[M'_{N_1}\right] = 4.96$$

Deuxième cas

$$\begin{matrix} n > n_1 \\ M'_{n-1} + n\,\varepsilon < \beta \end{matrix} \Leftrightarrow n_1 < n < n_2$$

n_2 étant défini par $M'_{n_2-1} + n_2\,\varepsilon = \beta$

En ce cas le schéma est le suivant :

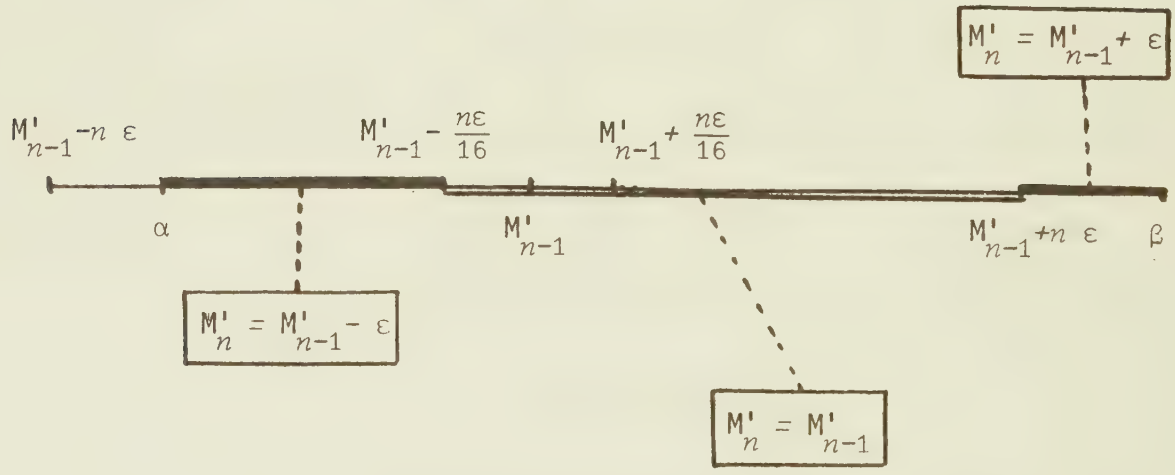


schéma 2

Pour une répartition de a_n dans l'intervalle $\left[M'_{n-1} - n\,\varepsilon\ ,\ M'_{n-1} + n\,\varepsilon\right]$ qui se réduit d'ailleurs à $\left[\alpha, M'_{n-1} + n\,\varepsilon\right]$ nous avons vu ce que la machine écrivait.

Remarquons qu'il est évident que :

(24) $M'_{n-1}+2\,n\,\varepsilon > \beta$

Ceci est évident d'après

$$E\left[a-M'_{n_1}\right] \simeq \frac{n_1\,\varepsilon}{4}$$

et $n > n_1$

De (24) on déduit que :

$$\forall a_n \in \left[M'_{n-1}+n\,\varepsilon\ ,\ \beta\right)$$

$$\varepsilon \leq \frac{a_n - M'_{n-1}}{n} < 2\,\varepsilon$$

Donc dans cet intervalle la machine écrira :

$$M'_n = M'_{n-1} + \varepsilon\ .$$

Pour une valeur donnée M'_{n-1} on a donc :

$$E\left[M'_n/M'_{n-1}\right] = \left[M'_{n-1}+\varepsilon\right]\left[\frac{\beta-M'_{n-1}-n\,\varepsilon}{d}\right] + M'_{n-1} \times \frac{17}{16}\,n\,\frac{\varepsilon}{d} + \left[M'_{n-1}-\varepsilon\right]\left[\frac{M'_{n-1}-n\,\frac{\varepsilon}{16}-\alpha}{d}\right]$$

$$E\left[M'_n/M'_{n-1}\right] = M'_{n-1}\left(1-\frac{2\varepsilon}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{d}\left(2\,\alpha-\frac{15}{16}\,n\,\varepsilon\right)$$

Le même raisonnement que dans le cas précédent permet de calculer $E\left[a-M'_n\right]$ pour $n > N_1$, N_1 étant l'estimation de n_1 .

$$E\left[a-M'_{N_1+p}\right] = E\left[a-M'_{N_1+p-1}\right]\left(1-\frac{2\varepsilon}{d}\right) + \frac{15}{16}\,\frac{(N_1+p)}{d}\,\varepsilon^2$$

Avec les notations précédentes

$$\zeta_{N_1+p} = \zeta_{N_1+p-1}\,(1-\theta) + \eta\,(N_1+p)$$

On posera temporairement :

$$x = 1 - \theta$$

On a la suite d'équations :

$$\zeta_{N_1+1} = \zeta_{N_1}\, x + \eta\ (N_1+1)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\zeta_{N_1+i} = \zeta_{N_1+i-1}\, x + \eta (N_1+i)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\zeta_{N_1+p} = \zeta_{N_1+p-1}\, x + \eta\ (N_1+p)$$

En multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne par x^{p-i} et en additionnant on trouve :

$$\zeta_{N_1+p} = \zeta_{N_1}\, x^p + (N_1+p)\ \eta \sum_{i=1}^{p-1} x^{p-i} - \eta \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)\ x^{p-i}$$

on a $\sum_{i=1}^{p} x^{p-i} = \frac{1-x^p}{1-x}$

$$\sum_{i=1}^{p} (p-i)\ x^{p-i} = x\ \frac{d}{dx}\ \left[\frac{1-x^p}{1-x}\right] = \frac{-p\ x^p}{1-x} + x\frac{(1-x^p)}{(1-x)^2}$$

On trouve finalement :

$$E\left[a-M'_{N_1+p}\right] = E\left[a-M'_{N_1}\right](1-\Theta)^p + \eta\ \left[N_1\left(\frac{1-(1-\Theta)^p}{\Theta}\right) + \frac{p+1}{\Theta} - \frac{1-(1-\Theta)^{p+1}}{\Theta^2}\right]$$

Dès que p est assez grand on peut remplacer $(p+1)$ par p.
D'autre part :

$$E\left[a-M'_{N_1}\right] = \frac{d}{2} - N_1\ \varepsilon$$

$$= \frac{d}{2}\ (1-N_1\Theta)$$

Le terme entre crochets peut s'écrire :

$$\frac{\eta}{\Theta^2}\ \{[N_1\Theta-1] - [N_1\Theta-1]\ (1-\Theta)^p + p\Theta\}$$

et $\quad \frac{\eta}{\Theta^2} = \frac{15}{64}\ d$

$$(24)\quad E\left[a-M'_{N_1+p}\right] = \frac{47}{32}\ \left[1-N_1\Theta\right]\ (1-\Theta)^p\ \frac{d}{2} + \frac{15}{64}\ d\ \left[(N_1+p)\Theta-1\right]$$

Calculons une estimation N_2 de n_2 , en définissant N_2 par :

$$E\left[M'_{N_2}\right] + N_2\,\varepsilon = \beta$$

ou ce qui est équivalent :

$$E\left[a - M'_{N_2}\right] = N_2\,\varepsilon - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}\left[N_2\Theta - 1\right]$$

En posant $N_2 = N_1 + p_2$, et en utilisant (24) on obtient l'équation :

$$\left[(N_1 + p_2)\,\Theta - 1\right] = \frac{47}{17}\left[1 - N_1\Theta\right](1-\Theta)^{p_2}$$

soit $$\left[\frac{p_2\Theta}{1-N_1\Theta} - 1\right] = \frac{47}{17}\left[1-\Theta\right]^{p_2}$$

On sait que $N_1\Theta = \frac{2N_1\varepsilon}{d} = 0.808$

On peut résoudre graphiquement l'équation :

$$Log\left[\frac{p_2\Theta}{0.192} - 1\right] = Log\left(\frac{47}{17}\right) - p_2\Theta$$

$$Log\ [p_2\Theta - 0.192] = -(p_2\Theta - 0.192) - 0.192 + Log\left[\frac{47}{17} \times 0.192\right]$$

La solution de : $Log\ X = -X - 0.825$

est $X = 0.319$

$p_2\Theta - 0.192 = 0.319$

$p_2\Theta = 0.511$

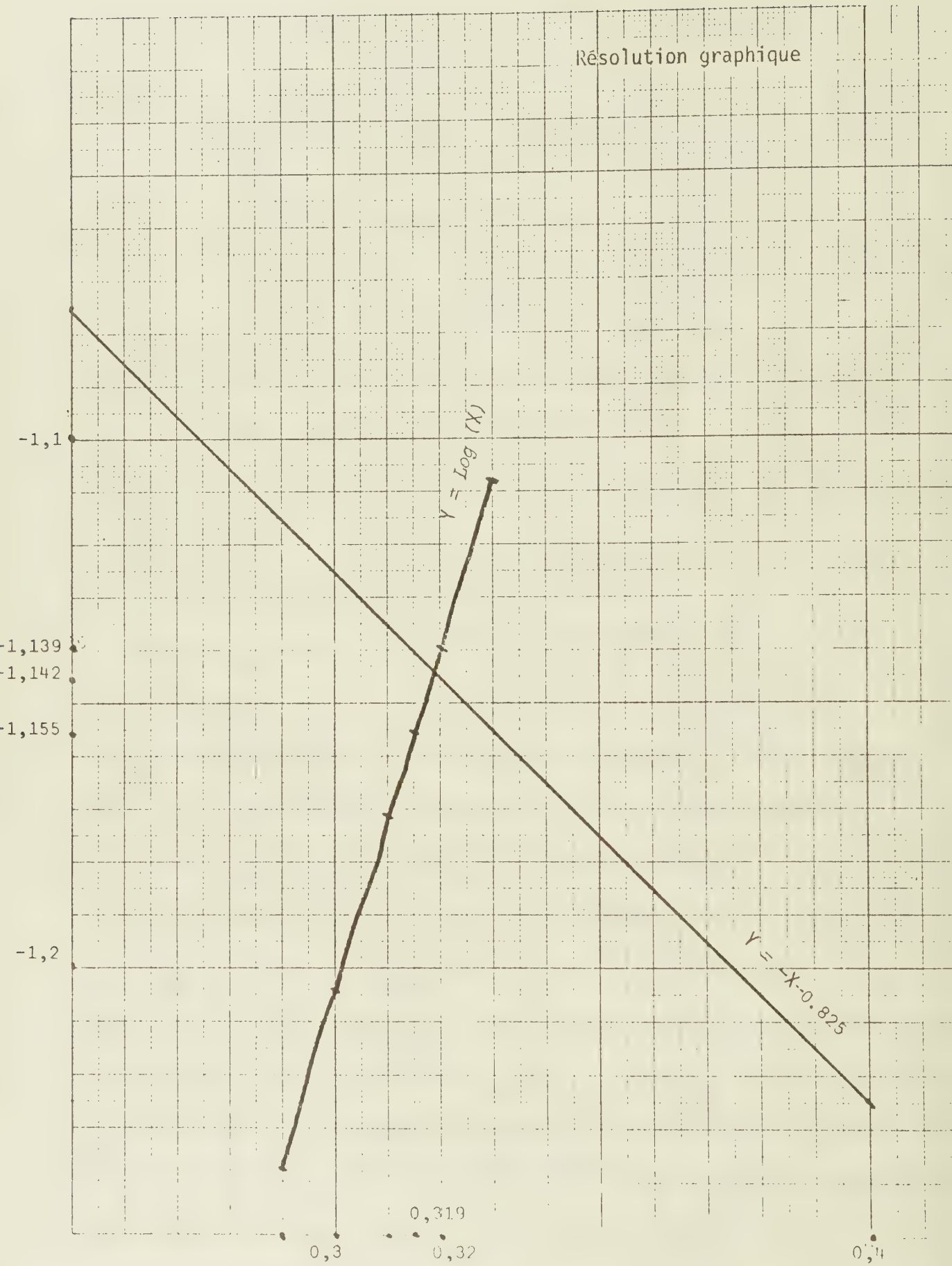
(24') soit : $\frac{N_2\varepsilon}{d} = 0.66$

$$E\left[M'_{N_2}\right] = a - 0.16\,d$$

Application : $\alpha = 4.8$ $\beta = 5.2$ $n_0 = 6$

$$E\left[M'_{N_2}\right] = 4.936$$

$$N_2 = 2.77\ \ 10^5$$


Résolution graphique
-1,1
-1,139
-1,142
-1,155
-1,2
Y = Log (X)
Y = -X-0.825
0,319
0,3
0,32
0,4

Troisième cas pour $n > n_2$, le schéma est le suivant, tant que

$$M'_{n-1} - \frac{n\,\varepsilon}{16} > \alpha$$

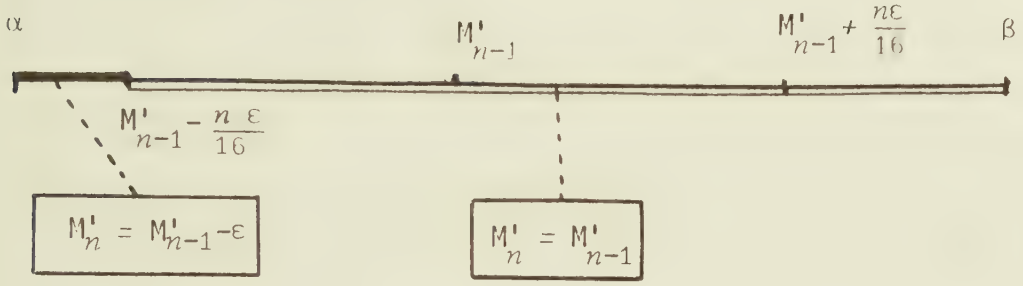


schéma 3

Le même raisonnement donne pour une valeur donnée de M'_{n-1} :

$$E\left[M'_n \mid M'_{n-1}\right] = M'_{n-1} - \varepsilon \left[\frac{M'_{n-1} - \frac{n\varepsilon}{16} - \alpha}{d}\right]$$

On déduit par le même raisonnement que précédemment que pour $n > n_2$:

$$E\left[M'_n\right] = E\left[M'_{n-1}\right]\ (1 - \frac{\varepsilon}{d}) + \frac{\varepsilon}{d}\ \left[\alpha + \frac{n\varepsilon}{16}\right]$$

$$E\left[M'_n - \alpha\right] = E\left[M'_{n-1} - \alpha\right]\ (1 - \frac{\varepsilon}{d}) + \frac{\varepsilon^2}{16d}\, n$$

Cette relation a la même forme que la relation obtenue au deuxième cas, à condition de remplacer : Θ par Θ', η par η', et

$$E\,[a - M'_n] \quad \text{par} \quad E\,[M'_n - \alpha]$$

Posons $\xi_n = E\,[M'_n - \alpha]$

$$\xi_{N_2+p} = \xi_{N_2+p-1}\ (1 - \Theta') + \eta'\ (N_2 + p)$$

Le calcul précédent donne donc :

$$E\left[M'_{N_2+p} - \alpha\right] = E\left[M'_{N_2+p-1} - \alpha\right]\ (1-\Theta')^p + \eta'\ \left[N_2\left(\frac{1-(1-\Theta')^p}{\Theta'}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{p+1}{\Theta'} - \frac{1-(1-\Theta')^{p+1}}{\Theta'^2}\right]$$

En faisant les mêmes opérations que dans le deuxième cas et en remarquant que :

$$E\left[M'_{N_2} - \alpha\right] = d\ \left[1 - N_2\ \Theta'\right]$$

$$\frac{\eta'}{\Theta'^2} = \frac{1}{16}$$

Il vient :

$$(25)\quad E\left[M'_{N_2+p} - \alpha\right] = \frac{17}{16}\ \left[1-N_2\Theta'\right]\ (1-\Theta')^p\ d + \frac{d}{16}\ \left[(N_2+p)\ \Theta' - 1\right]$$

Calculons une estimation N_3 de la valeur n_3 de n pour laquelle le schéma 3 n'est plus valable :

$$M'_{n_3} - \frac{n_3\ \varepsilon}{16} = \alpha$$

Définissons N_3 par :

$$E\left[M'_{N_3}\right] - \frac{N_3\ \varepsilon}{16} = \alpha$$

Posons $N_3 = N_2 + p_3$

Soit $$E\left[M'_{N_2+p_3} - \alpha\right] = \frac{(N_2+p_3)\ \Theta'}{16}\ d$$

De (25) on déduit alors :

$$1 = 17\ (1-N_2\Theta')\ (1-\Theta')^{p_3}$$

$$1 - N_2\Theta' = 0{,}34$$

$$(1 - \Theta')^{p_3} \sim e^{-p_3\ \Theta'}$$

$$\text{D'où}\quad \frac{p_3\ \varepsilon}{d} = 1.75$$

$$(25')\qquad \frac{N_3\ \varepsilon}{d} = 2.41$$

(26) $$E\left[a-M'_{N_3}\right] = 0.344\ d$$

Application : $\alpha = 4.8 \quad \beta = 5.2 \quad n_0 = 6$

$$E\left[M'_{N_3}\right] = 4.861$$

$$N_3 = 1.006\ \ 10^6$$

Quatrième cas Pour $n > n_3$ M'_n *est constant et* $M'_n = M'_{n_3}$.

Théorème (4) : Etant donnée une suite de nombres a_n *positifs de répartition uniforme dans un intervalle borné, le biais du aux erreurs de troncature pour le résultat* M'_n *de l'algorithme* (16) *peut être évalué en* 4 *étapes.*

1) * $n \leq n_1$, *formule* (22)
   * *une estimation* N_1 *de* n_1 *est donnée par la formule* (22')

2) * $n_1 \leq n \leq n_2$, *formule* (24)
   * *une estimation* N_2 *de* n_2 *est donnée par la formule* (24')

3) * $n_2 \leq n \leq n_3$, *formule* (25)
   * *une estimation* N_3 *de* n_3 *est donnée par* (25')

4) * $n \geq n_3$ M'_n *est constant, une estimation du biais est donnée par la formule :*

$$E\left[a-M'_n\right] = + 0.344\ d$$

b) Calcul d'erreur pour $M_1 = a_1$

$$M_n = M_{n-1} + \mu_n (a_n - M_{n-1})$$

avec $\mu_n = \frac{1}{n}$ pour $n \leq N$

$\mu_n = \frac{1}{N}$ pour $n \geq N$

Nous supposerons que N est assez petit pour qu'on ait une probabilité non nulle d'avoir :

$$|a_N - M'_{N-1}| > N\,\varepsilon$$

et nous supposerons aussi : $\frac{2N+1}{3} \times \frac{\varepsilon}{16} << |$

La formule (23) s'applique pour $n \leq N$.

Pour $n > N$ posons $n = N + p$ $\mu_n = \frac{1}{N}$

Le schéma 1 est valable mais ce sont les quantités de la forme de $M'_{n-1} - N\,\varepsilon$, qu'il faut considérer. La formule (19) reste valable. La formule (21) devient :

$$E\left[a - M'_{N+p}\right] = E\left[a - M'_{N+p-1}\right]\left(1 - \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{16d}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

De cette formule on déduit :

$$E\left[a - M'_{N+p}\right] = E\left[a - M'_N\right]\left(1 - \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{16d}\right)^p + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum_{i=0}^{p-1} \left(1 - \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{16d}\right)^i$$

Remplaçons $E[a - M'_N]$ par sa valeur donnée par (22) pour obtenir une approximation au premier ordre en ε de $E[a - M'_{N+p}]$, et utilisons la formule :

$$\sum_{i=0}^{p-1} (1-y)^i = \frac{1-(1-y)^p}{y}$$

$$E\left[a - M'_{N+p}\right] = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left[\frac{(N+1)}{2}\left(1 - \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{16d}\right)^p + \frac{1-\left(1 - \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{16d}\right)^p}{\left(\frac{1}{N} - \frac{\varepsilon}{16d}\right)}\right]$$

Le terme du premier ordre en ε est :

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)\left[\frac{N+1}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^p + N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^p\right)\right]$$

$$E\left[a-M'_{N+p}\right] \sim \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right) N \left[1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^p\right]$$

On trouve donc un biais approximativement constant :

$$E\left[a-M'_{N+p}\right] \sim \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right) N \qquad (27)$$

Cette méthode semble donc meilleure. L'inconvénient de cette méthode vient du fait que, indépendamment de toute troncature, la variance de l'estimateur ne tend pas vers 0. Calculons cette limite de la variance. On a donc :

$$M_n = M_{n-1} + \frac{1}{n}\left[a_n - M_{n-1}\right] \quad \text{pour} \quad n \leq N$$

$$M_{N+p} = M_{N+p-1} + \frac{1}{N}\left[a_{N+p} - M_{N+p-1}\right] \quad \text{pour} \quad p > 0$$

Les variables a_i sont supposées indépendantes et de même loi, d'espérance a et de variance σ^2.

On a :

$$M_N = \frac{1}{N}\left[a_1 + \ldots . a_N\right]$$

Donc $$E[M_N] = a \ , \ \sigma^2[M_N] = \frac{\sigma^2}{N}$$

On démontre par récurrence que $\forall p$, $E[M_{N+p}] = a$

L' espérance de l'estimateur reste donc a .

Calculons la variance de l'estimateur.

Posons : $1 - \frac{1}{N} = \rho$

On peut écrire :

$$M_{N+p} - E[M_{N+p}] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{p-1} (a_{N+p-k} - a)\, \rho^k + \rho^p (M_N - a)$$

$$(M_{N+p} - a)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\ell=0}^{p-1} (a_{N+p-k} - a)\, (a_{N+p-\ell} - a)\, \rho^{k+\ell}$$

$$+ \rho^{2p}\, (M_N - a)^2 + \frac{2\rho^p}{N} \sum_{k=0}^{p-1} (a_{N+p-k} - a)\, (M_N - a)$$

D'après l'expression de M_N et l'indépendance des a_i l'espérance de la dernière somme est nulle.

De même :

$$E[(a_{N+p-k} - a)\, (a_{N+p-\ell} - a)] = \sigma^2 \delta_{k\ell}$$

L'espérance du premier terme est :

$$\frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{k=0}^{p-1} \rho^{2k} = \frac{\sigma^2}{N^2} \times \frac{1-\rho^{2p}}{1-\rho^2}$$

$$\sigma^2 (M_{N+p}) = \frac{\sigma^2}{N^2} \left(\frac{1-\rho^{2p}}{1-\rho^2}\right) + \rho^{2p} \frac{\sigma^2}{N}$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \left[\frac{(1-\rho)\, (1-\rho^{2p})}{(1-\rho^2)} + \rho^{2p}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \frac{(1+\rho^{2p+1})}{(1+\rho)}$$

$$\sigma^2 [M_{N+p}] = \frac{1}{N} \times \frac{1}{2 - \frac{1}{N}}\, \sigma^2 \left[1 + (1 - \frac{1}{N})^{2p+1}\right] \qquad (28)$$

$\sigma^2 [M_{N+p}]$ est donc de l'ordre de $\frac{\sigma^2}{2N}$ et ne tend pas vers 0.

Théorème (5) : Etant donnée une suite de nombres a_n *positifs de répartition uniforme dans un intervalle borné, le biais du aux erreurs de troncature pour le résultat* M'_{N+p} *de l'algorithme* (17) *est approximativement constant et donné par la formule* (27). *La variance de l'estimateur, indépendamment des erreurs de troncatures est donnée par la formule* (28).

Des résultats expérimentaux sont présentés au tableau 3, et confirment les calculs que nous venons de faire.

L'algorithme (17) est dangereux car il peut faire croire à une convergence, cependant, s'il est bien utilisé, la formule (26) indique la correction qu'il est très facile de faire.

L'algorithme (18) semble donner de bien meilleurs résultats, mais la variance de l'estimateur ne tend pas vers 0 (figure 14)

La comparaison entre les diverses méthodes proposées au II.3 et les algorithmes (17) et (18) sera faite au chapitre IV. C'est seulement dans ce chapitre que nous pourrons tirer des conclusions.

Remarque : Pour une simulation calculant une moyenne temporelle comme celle de la formule (2) p-28, les analogues des algorithmes (17) et (18) sont :

$$M(T_n) = M(T_{n-1}) + \frac{(T_n - T_{n-1})}{T_n} [L_n - M(T_{n-1})]$$

et

$$M(T_n) = M(T_{n-1}) + \mu_n (L_n - M(T_{n-1}))$$

Tableau 3

Résultats comparés pour les différents algorithmes.

$a_n \in [4.8, 5.2]$

n	algorithme 5	algorithme 17	algorithme 18 N = 3.10^4
10^3	4.998	4.998	
2.10^3	4.994	4.995	
10^4	4.997	4.996	
2.10^4	4.987	4.994	
3.10^4	4.980	4.992	
4.10^4	4.978	4.990	4.991
5.10^4	4.976	4.988	4.990
6.10^4	4.975	4.986	4.989
7.10^4	4.974	4.984	4.988
8.10^4	4.9736	4.982	4.988
9.10^4	4.973	4.980	4.988
10^5	4.972	4.977	4.987
2.10^5	4.970	4.956	4.986
3.10^5	4.830	4.930	4.986
4.10^5	4.749	4.907	4.987
5.10^5	4.699	4.890	4.987
6.10^5	4.666	4.878	4.987
7.10^5	4.642	4.869	4.988
8.10^5	4.625	4.864	4.986
9.10^5	4.611	4.861	4.987
10^6	4.600	4.860	4.987
2.10^6	4.550		4.987
3.10^6	4.534	↓	4.986
4.10^6	4.194		4.986
5.10^6	3.355		4.987
6.10^6	2.796		4.986
7.10^6	2.396	constant	4.987
8.10^6	2.097		4.985
9.10^6	1.864		4.987
10^7	1.677	↓	4.986

Fig. 14 : Algorithme (18) pour N=1/30000 , $a_n \in [\ 4.8\ ,\ 5.2]$

Annexe : Calcul de l' espérance de l' erreur de troncature faite sur une variable aléatoire de répartition uniforme .

Prenons toujours l'exemple d'un ordinateur travaillant en système hexadécimal, les calculs pour les ordinateurs travaillant en système binaire s'en déduisant de façon simple.

Nous voulons calculer R l'espérance de r , erreur relative de troncature .

$$R = E\,[r]$$

Le calcul est assez important car dans la littérature on utilise souvent pour R une valeur qui n'est pas du tout exacte.Nous le ferons dans le cas où *la variable* X *est répartie uniformément dans l'intervalle* $[\alpha,\beta]$ $0 < \alpha < \beta$.

Définissons déjà les entiers p et k et les réels λ et μ tels que :

$$\alpha = 16^p\,(1 + \lambda)$$

$$\beta = 16^{p+k}\,(1 + \mu)$$

avec $k > 0$

$\lambda, \mu \in [0,15)$

Divisons l'intervalle $[\alpha,\beta]$ en intervalles S_i à l'intérieur desquels les nombres ont la même caractéristique $p + i + 1$:

$$S_0 : [16^p(1+\lambda),\ 16^{p+1})$$

$$S_1 : [16^{p+1},\ 16^{p+2})$$

$$\vdots$$

$$S_i : [16^{p+i},\ 16^{p+i+1})$$

$$\vdots$$

$$S_k : [16^{p+k},\ 16^{p+k}\,(1+\mu)]$$

* Calculons déjà la valeur de R pour une variable X de répartition uniforme dans S_i :

$$X = 16^{p+i+1} \times (0.M)$$

$$X' = 16^{p+i+1} \times (0.M')$$

$$r = \frac{e}{X'} = \frac{(0.M) - (0.M')}{(0.M')}$$

r étant indépendant de p et de i, nous pouvons supposer $p=0$, $i=-1$, $X \in [\frac{1}{16}, 1)$

M' est un nombre entier qui a n_0 chiffres hexadécimaux, le premier étant non nul.

$$M' \in [16^{n_0-1}, 16^{n_0} - 1)$$

$$X' = 0.M' = 16^{-n_0} M'$$

X' peut prendre les valeurs comprises entre $\frac{1}{16}$ et $1-16^{-n_0}$ qui sont les extrémités d'intervalles d'amplitude 16^{-n_0}. Il y a 15.16^{n_0-1} intervalles.

Les n_0 premiers chiffres de e sont nuls :

$$e \in [0, 16^{-n_0})$$

X étant une variable de répartition uniforme dans $[\frac{1}{16}, 1)$ les chiffres hexadécimaux de M ont une répartition uniforme sur l'ensemble des 16 premiers entiers, et e et X' ont aussi des répartitions uniformes dans les intervalles auxquels ils appartiennent.

Conditionnons X par une valeur X', c'est-à-dire considérons toutes les réalisations de X qui correspondent à la même représentation en machine, ce qui revient à supposer que X appartient à un intervalle de largeur 16^{-n_0}, la distribution de e est alors indépendante de la valeur de X' .

$$P(x < e < x + dx \,/\, X' = x') = P(x < e < x + dx)$$

Les variables e et X' sont donc indépendantes .

$$E\left(\frac{e}{X'}\right) = E(e)\ E\left(\frac{1}{X'}\right)$$

e et X' ayant une répartition uniforme, il existe un nombre P, densité de probabilité du couple e, X' tel que :

$$(2) \qquad E\left(\frac{e}{X'}\right) = P \sum_{X'=\frac{1}{16}}^{1-16^{-n_0}} \frac{\Delta X'}{X'} \int_0^{16^{-n_0}} r\,dr$$

nous avons vu que :

$$\Delta X' = 16^{-n_0}$$

P peut être calculé par :

$$1 = P \sum_{X'=\frac{1}{16}}^{1-16^{-n_0}} \Delta X' \int_0^{16^{-n_0}} dr$$

Donc $$P = \frac{16^{n_0+1}}{15}$$

(2) donne :

$$E\left(\frac{e}{X'}\right) = \frac{16^{-n_0+1}}{2 \times 15} \sum_{X'=\frac{1}{16}}^{1-16^{-n_0}} \frac{16^{-n_0}}{X'}$$

La somme peut être remplacée par l'intégrale de la fonction décroissante $\frac{1}{x}$ en faisant une erreur relative inférieure à

$$\frac{16^{-n_0}}{Log\ 16}$$ On obtient :

$$R = E\left(\frac{e}{X'}\right) = \frac{16^{-n_0+1}}{15 \times 2}\ Log\ 16$$

* Le calcul pour une variable X de répartition uniforme dans $[\frac{1+\lambda}{16}, 1)$ est analogue. Supposant que λ a une représentation exacte en machine (faisant ainsi une erreur relative inférieure à

$$\frac{16^{-n_0}}{15-\lambda}\ )$$

$$R = E\left(\frac{e}{X'}\right) = \frac{16^{-n_0+1}}{2(15-\lambda)}\ [Log\ 16 - Log\ (1+\lambda)]$$

* Pour une variable de répartition uniforme dans

$$\left[\frac{1}{16}, \frac{1+\mu}{16}\right)$$

$$R = E\left(\frac{e}{X'}\right) = \frac{16^{-n_0+1}}{2\mu}\ [Log\ (1+\mu)]$$

* La formule générale se déduit de

$$E[r] = \sum_i E[r/X \in S_i]\ P(X \in S_i)$$

$$R = E(r) = \frac{16^{-n_0+1}}{2}\left[\frac{\frac{16^k-1}{15} Log\ 16 + 16^k\ Log\ (1+\mu) - Log(1+\lambda)}{16^k - 1 + 16^k\ \mu - \lambda}\right]$$

Le même calcul peut être fait pour $E[r^2]$:

$$E[r^2] = \frac{16^{-2n_0+1}}{3}\left[\frac{(16^k-1)17 + \frac{16}{1+\lambda} - \frac{16^{k+1}}{1+\mu}}{16^k - 1 + 16^k\ \mu - \lambda}\right]$$

Si par exemple $\lambda = \mu = 0$, c'est-à-dire pour une variable de répartition uniforme dans

$[16^p, 16^{p+k}]$, on trouve quels que soient p et k, pour

pour $n_0 = 6$:

$$R = E(r) = 8.8 \times 10^{-8}$$

$$\sigma(r) = 1.05\ \ 10^{-7}$$

Cependant R dépend beaucoup de λ et de μ, par exemple pour des nombres uniformément répartis dans l'intervalle [15 , 16] on obtient :

$k = 1 \quad \mu = 0 \quad \lambda = 14$

$$R = E\,(r) = 3 \times 10^{-8}$$

Pour des nombres uniformément répartis dans l'intervalle [1,2] on obtient :

$k = 0 \quad \mu = 1 \quad \lambda = 0$

$$R = E\,(r) = 66 \times 10^{-8}$$

En conclusion :

La valeur de R pour une variable uniforme dépend beaucoup de l'intervalle dans lequel varie la variable. R peut passer de $3.\ 10^{-8}$ à $66.\ 10^{-8}$ par exemple. Il faut donc dans chaque cas faire ce calcul, ou savoir que si l'on utilise la première formule ($\lambda = \mu = 0$) on n'obtient qu' une vague idée du résultat .

Remarque : Dans le cas d'un ordinateur travaillant en base 2, on écrirait

$\alpha = 2^{\delta}\,[1+\eta] \quad \beta = 2^{\delta+\ell}\,[1+\theta]$ on trouverait :

$$R = E\,(r) = \frac{2^{-n_0+1}}{2}\left[\frac{-\,Log(1+\eta) + 2^{\ell}Log(1+\theta) + (2^{\ell}-1)Log2}{2^{\ell}(1+\theta) - (1+\theta)}\right] \quad (3)$$

$$E\,[r^2] = \frac{2^{-2n_0+1}}{3}\left[\frac{\frac{1-\eta}{1+\eta} + 2^{\ell+1}\ \frac{\theta}{1+\theta} + (2^{\ell}-2)}{2^{\ell}(1+\theta) - (1+\eta)}\right] \quad (4)$$

Les relations (3) et (4) généralisent des résultats obtenus par La Porte et Vignes [8],dans le cas particulier $\eta = \theta = 0$.

Nous avons fait le calcul dans le cas d'une variable uniforme, mais un calcul analogue pourrait être fait dans un autre cas.

Référence sur les erreurs de troncature

[75] Louis B. RALL : *Error in Digital Computation*. John Wiley and Sons.

[76] J.H. WILKINSON : *Rounding errors in algebraic processes*. London, Her Majesty's stationery office, (1963).

[77] J.H. WILKINSON : *Error Analysis of Floating-point Computation*. Numer. Math. 2, 319-340 (1960).

[78] Peter LINZ : *Accurate Floating-point Summation*. Comm. of the ACM, 13, (June 1970), 361-362.

[79] R.J. WALKER : *Binary Summation*. Comm. of the ACM, 14 , (June 1971), 417.

[80] J.M. WOLFE : *Reducing Truncation Errors by programming*. Comm. of the ACM, 7, (June 1964), 355-356.

[81] D.R. ROSS : *Reducing Truncation Errors Using Cascading Accumulators* Comm. of the ACM, 8, (Janv. 1965), 32-33.

[82] W. KAHAN : *Further Remarks on Reducing Truncation Errors*. Comm. of the ACM, 8, (Janv. 1965), 40.

[83] James GREGORY : *A comparison of Floating-point Sumation Methods*. Comm. of the ACM, 15, Sept. 1972, 838.

[84] LA PORTE M., VIGNES J. : *Etude statistique des erreurs dans l'arithmétique des ordinateurs ; application au contrôle des résultats d'algorithmes*. Numerische Mathematik, 23, 63-72 (1974).

[85] VIGNES J., LA PORTE M. : *Error Analysis in Computing*. Proceeding of IFIP Congress Stockkolm, August (1974), pp. 610-614

[86] C. MACCHI : *Itération stochastique et traitements numériques adaptatifs*. Thèse de doctorat Université Paris VI.

[87] P.L. RICHMAN : *Automatic error analysis for determining precision*. Comm. of the ACM, 15 (Sept. 72) 813-817.

[88] H. KUKI and W.J. CODY : *A statistical study of the accuracy of floating point number systems*. Comm. of the ACM, 16-4 (April 73) 223-230.

Listing : algorithme (5) : SC , algorithme (17) : SCC.

```
0001                DIMENSION AA(100),AB(100),IA(100),IB(100)
0002                DATA AST,BLANC/1H*,1H /
0003                 A=5.
0004                IX=13
0005               SSC=0
0006               CM=0
0007                DO 1 I=1,100
0008                DO 20  J=1,100000
0009                K=J+(I-1)*100000
0010                CALL ALEA(C,IX)
0011                CM=CM+C
0012                SC=CM/K
0013                SSC=SSC+(C-SSC)/K
0014                ERSSC=(SSC-A)*10**7/K/A
0015                ERSC=(SC-A)*10**7/K/A
0016                IF((I.NE.1.AND.J.NE.100000).OR.(K-1000*(K/1000).NE.0.
                   1 AND.K-1000*(K/1000).NE.1)) GOTO 20
0017                   WRITE(6,2) K,ERSC,ERSSC,SC,SSC
0018          2     FORMAT(5X,I8,4(E20.10))
0019          20     CONTINUE
0020                AA(I)=ERSC
0021                AB(I)=ERSSC
0022          1     CONTINUE
0023                CALL AMAM(AA,AMAX,AMIN)
0024                CALL AMAM(AB,BMAX,BMIN)
0025                DA=AMAX-AMIN
0026                DB=BMAX-BMIN
0027                DO 5 I=1,100
0028                IA(I)=(AA(I)-AMIN)*49/DA
0029                IB(I)=(AB(I)-BMIN)*49/DB
0030          5       CONTINUE
0031                WRITE(6,6) AMAX,AMIN
0032          6     FORMAT(1H1,2E20.10)
0033                DO 8 I=1,100
0034                AA(I)=BLANC
0035          8     AB(I)=BLANC
0036                DO 9 I=1,50
0037                DO 10 J=1,100
0038                IF(IA(J).NE.50-I) GOTO 10
0039                AA(J)=AST
0040          10      CONTINUE
0041                II=50-I
0042          9       WRITE(6,6000) II,(AA(K),K=1,100)
0043          6000   FORMAT(I10,1H.,100A1)
0044                WRITE(6,6) BMAX,BMIN
0045                DO 11 I=1,50
0046                DO 12 J=1,100
0047                IF(IB(J).NE.50-I) GOTO 12
0048                AB(J)=AST
0049          12     CONTINUE
0050                II=50-I
0051          11      WRITE(6,6000) II,(AB(K),K=1,100)
0052                END
```

```
0001                SUBROUTINE AMAM(A,AMAX,AMIN)
0002                DIMENSION A(100)
0003                AMAX=A(1)
0004                AMIN=A(1)
0005                DO 1 I=2,100
0006                IF(AMAX.GT.A(I)) GOTO 2
0007                AMAX=A(I)
0008          2      IF(AMIN.LT.A(I)) GOTO 1
0009                AMIN=A(I)
0010          1      CONTINUE
0011                RETURN
0012                END
```

```
0001                 SUBROUTINE ALEA(E,IX)
0002                IY=IX*695539
0003                 IF(IY) 1,2,2
0004          1     IY=IY+2147483647+1
0005          2      E=FLOAT(IY)/2147483647
0006                 E=2*E/5.+4.8
0007                 IX=IY
0008                RETURN
0009                END
```

Listing méthode 1

```
0001                DIMENSION CM(10),DM(10),SC(10)
0002                IX=13
0003                DO 10 I=1,10
0004                CM(I)=0.
0005                DM(I)=0.
0006          10      SC(I)=0.
0007                DO 1 I=1,10000000
0008                CALL ALEA(C,IX)
0009                DO 2 N=1,10
0010                C=N*C
0011                DM(N)=DM(N)+C
0012                IF(I-KN*(I/KN).NE.0) GOTO 2
0013                CM(N)=CM(N)+DM(N)
0014                DM(N)=0.
0015          2     CONTINUE
0016                IF(I-100000*(I/100000).NE.0) GOTO 1
0017                WRITE(6,100) I,(CM(K),K=1,10)
0018          100    FORMAT(I10,5E20.10,/10X,5E20.10,/)
0019          1      CONTINUE
0020                END
```

Algorithme (18) , μ = 30000

```
0001                DIMENSION AC(100),IC(100)
0002                DIMENSION AA(100),AB(100),IA(100),IB(100)
0003                DATA AST,BLANC/1H*,1H /
0004                  A=5.
0005                  IX=13
0006                SSC=0
0007                CM=0
0008                DO 1 I=1,100
0009                DO 20  J=1,100000
0010                K=J+(I-1)*100000
0011                CALL ALEA(C,IX)
0012                CM=CM+C
0013                SC=CM/K
0014                KK=K
0015                IF(K.GT.30000) KK=30000
0016                SSC=SSC+(C-SSC)/KK
0017                ERSSC=(SSC-A)*10**7/K/A
0018                ERSC=(SC-A)*10**7/K/A
0019                IF((I.NE.1.AND.J.NE.100000).OR.(K-1000*(K/1000).NE.0.
                   1 AND.K-1000*(K/1000).NE.1)) GOTO 20
0020                   WRITE(6,2) K,ERSC,ERSSC,SC,SSC
0021          2     FORMAT(5X,I8,4(E20.10))
0022         20      CONTINUE
0023                AA(I)=ERSC
0024                AB(I)=SSC
0025                AC(I)=SC
0026          1     CONTINUE
0027                CALL AMAM(AA,AMAX,AMIN)
0028                CALL AMAM(AB,BMAX,BMIN)
0029                CALL AMAM(AC,CMAX,CMIN)
0030                DA=AMAX-AMIN
0031                DB=BMAX-BMIN
0032                DC=CMAX-CMIN
0033                DO 5 I=1,100
0034                IA(I)=(AA(I)-AMIN)*49/DA
0035                IC(I)=(AC(I)-CMIN)*49/DC
0036                IB(I)=(AB(I)-BMIN)*49/DB
0037          5       CONTINUE
0038                WRITE(6,6) AMAX,AMIN
0039          6     FORMAT(1H1,2E20.10)
0040                DO 8 I=1,100
0041                AA(I)=BLANC
0042                AC(I)=BLANC
0043          8     AB(I)=BLANC
0044                DO 9 I=1,50
0045                DO 10 J=1,100
0046                IF(IA(J).NE.50-I) GOTO 10
0047                AA(J)=AST
0048         10       CONTINUE
```

```
0049                    II=50-I
0050            9         WRITE(6,6000) II,(AA(K),K=1,100)
0051            6000    FORMAT(I10,1H.,100A1)
0052                    WRITE(6,6) CMAX,CMIN
0053                    DO 11 I=1,50
0054                    DO 12 J=1,100
0055                    IF(IB(J).NE.50-I) GOTO 12
0056                    AA(J)=BST
0057            12        CONTINUE

0058                    II=50-I
0059            11        WRITE(6,6000) II,(AB(K),K=1,100)
0060                      WRITE(6,6) CMAX,CMIN
0061                    DO 13 I=1,50
0062                    DO 14 J=1,100
0063                    IF(IC(J).NE.50-I) GOTO 14
0064                    AC(J)=BST
0065            14        CONTINUE
0066                    II=50-I
0067            13        WRITE(6,6000) II,(AC(K),K=1,100)
0068                    END
```

C H A P I T R E III

Convergence des simulations

Introduction : Importance de la signification statistique des résultats.

III.1 Méthode de LE GALL

A- Détermination de l'intervalle de confiance
B- Calcul de la variance des résultats

III.2 Les autres méthodes

A- Séparation en blocs "indépendants"
B- Analyse spectrale
C- Utilisation des points de renouvellement
D- Approximation par des schémas autorégressifs

III.3 Détermination précise de l'intervalle de confiance pour la simulation M/M/I

INTRODUCTION

La signification statistique des résultats, qui est déduite de la convergence de l'estimateur est fondamentale. Très souvent lorsqu'on fait une simulation, on souhaite avoir une précision supérieure à celle qu'il est possible d'avoir et on accuse la qualité des nombres pseudo-aléatoires ou d'autres causes d'erreur, là où il n'y a pas d'erreur en fait mais seulement une méconnaissance des propriétés de l'estimateur.

Donnons un exemple : Si on veut faire une simulation d'un tirage de dés, on peut faire une simulation parfaite, si on ne lui fait effectuer que deux tirages, on peut très bien trouver 1 et 2 comme résultat et on sera très loin de trouver une moyenne de 3,5.

Le problème était posé depuis longtemps par les téléphonistes [41 à 45] et [60], mais il faut reconnaître qu'il a été longtemps négligé par les informaticiens. Il n'est pas rare de voir des articles sur des simulations sans discussion sur la validité, bien que le problème ait été posé dès 1963 par CONWAY [62] et que l'article de base [44] ait été publié par LE GALL en 67. Nous présenterons les différents articles récents sur la question [46 à 59] , [69] et [75]. Certains d'entre eux présentent des méthodes nouvelles intéressantes,(c'est le cas de [51], [56]), mais les auteurs ont d'une façon générale un peu tendance à oublier de faire référence à LE GALL.

Le problème est le suivant : une simulation est l'étude de certaines réalisations d'un processus stochastique $X(t)$, modèle du processus réel étudié.

En fait, pour une simulation sur ordinateur le modèle $X(t)$, ne peut prendre qu'un ensemble fini d'états E_i.

Un résultat particulier : "$X(t_j)$ appartient à l'état E_i" n'a pas d'intérêt si on ne connait pas la mesure de la probabilité pour que cet évènement soit réalisé; en fait une simulation n'a d'intérêt que si elle nous donne des renseignements sur l'espérance d'une fonction Y du processus $X(t)$.

Le résultat d'une simulation est un nombre y, valeur prise par une variable aléatoire Y; ce nombre n'a d'intérêt que s'il nous permet d'estimer E[Y].

Considérons la fonction $X_i(t)$ indicatrice de l'évènement :

"$X(t)$ appartient à l'état E_i".

$\begin{cases} X_i(t) = 1 \text{ si cet évènement est réalisé.} \\ X_i(t) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

La fonction $Y(t)$ associée à $X(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \Sigma\, y_i\, X_i(t)$$

La simulation étudie le processus $X(t)$ entre les instants 0 et T et mesure une estimation de $E[Y(t)]$.

Nous ne nous intéresserons en fait qu'aux processus strictement ergodiques et asymptotiquement stationnaires du second ordre.

Un processus $X(t)$ est asymptotiquement stationnaire du second ordre, si l'espérance : $E[X(t)]$ et la covariance : $E[X(t)\ X(t+\tau)]$ tendent respectivement, lorsque t tend vers l'∞, vers un nombre réel fini M, et une fonction $C(\tau)$, de la variable réelle τ, continue à l'origine.

Un processus $X(t)$ est strictement ergodique si la limite lorsque $T \to \infty$ de la moyenne temporelle entre 0 et T de toute fonction $Y[X(t)]$ est le nombre limite de l'espérance de la fonction aléatoire $Y[X(t)]$, lorsque $t \to \infty$. [29, p. 113, 470 et 585].

(Le théorème de Doob-Birkhov indique qu'un processus strictement stationnaire est presque sûrement ergodique, mais notre intuition nous pousse à admettre que les processus asymptotiquement stationnaires que nous étudions sont strictement ergodiques. *En tous cas s'ils ne le sont pas, il est inutile de faire une simulation).*

On veut estimer le nombre :

$$Z = \lim_{t \to \infty} E[Y(X(t))]$$

On utilise la moyenne temporelle Z_T, dont on sait par le théorème ergodique que :

$$Z_T \underset{T \to \infty}{\to} Z$$

L'estimateur Z_T peut en général s'écrire :

$$Z_T = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t)\, dt \qquad (1)$$

Nous utilisons la notation intégrale qui est générale, en réalité pour une simulation il s'agira toujours d'une fonction en escalier. Nous en avons donné un exemple au Chapitre I p. 25 formule (1).

(*Remarque* : on peut aussi être amené à utiliser des estimateurs un peu différents, comme celui du Chapitre II formule (18).)

On peut ainsi obtenir un résultat significatif en faisant une seule simulation mais de longue durée.

Il est théoriquement toujours possible de faire un grand nombre de simulations indépendantes, et de considérer la moyenne des résultats, mais pratiquement *il est bien délicat d'affirmer que deux simulations sont indépendantes;* d'autre part il est en général beaucoup plus coûteux de réinitialiser le système et c'est pourquoi il est souvent préférable de faire une simulation de longue durée.

III.1 Méthode de LE GALL

A- *Détermination de l'intervalle de confiance* :

Considérons la variable aléatoire Z_T, estimateur du nombre réel Z. Un intervalle de confiance ε, correspondant à un coefficient de confiance $1-\eta$, est un nombre ε tel que :

$$(2)\quad Pr\,[\,|\,Z_T - Z\,|\,<\varepsilon\,] > 1-\eta \qquad (2)$$

On peut toujours appliquer le théorème de TCHEBISCHEV [26, p.81].

Si pour un nombre α positif :

$$E\,[\,|Z_T - Z|^{\alpha}\,] = \mu < +\infty \qquad (3)$$

$$Pr\,[\,|Z_T - Z| \geq \varepsilon\,] \leq \frac{\mu}{\varepsilon^{\alpha}}$$

Remarque : Il ne faut pas oublier la valeur absolue dans l'équation (3)

En fait, on applique en général ce théorème pour $\alpha = 2$, qui s'écrit :

$$Pr\,[\,|Z_T - Z| \geq \varepsilon\,] \leq \frac{E\,[(Z_T - Z)^2]}{\varepsilon^2}$$

Compte tenu de :

$$Z = \lim_{T \to \infty} E [Z_T]$$

on remplace souvent, pour T assez grand, le terme $E [(Z_T - Z)^2]$ par la variance de Z_T : $\sigma^2 (Z_T)$. On a donc avec des hypothèses assez générales :

$$(4) \qquad Pr [|Z_T - Z| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2(Z_T)}{\varepsilon^2}$$

L'équation (4) est équivalente à (2), en choisissant :

$$(5) \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{\eta}}$$

Par exemple pour un coefficient de confiance de 95% on peut prendre :

$$(5') \qquad \varepsilon = 4.5\ \sigma$$

Lorsqu'on peut démontrer que le processus $X(t)$ *tend vers un processus de Markov, et dans ce cas seulement (LE GALL ayant démontré la réciproque [44]) la fonction de répartition de* $(Z_T - Z)/\sigma(Z_T)$ *tend celle de la loi normale* et on peut utiliser un intervalle de confiance plus petit :

$$(6) \qquad Pr \left[\frac{Z_T - Z}{\sigma(Z_T)} < \delta \right] = \Pi (\delta) - \Pi (-\delta)$$

ou $\Pi (x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée :

$$\Pi (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

L'équation (6) est équivalente à (2) en choisissant :

$$(7) \qquad \varepsilon = \sigma\ \delta$$

pour $1 - \eta = \Pi (\delta) - \Pi (-\delta)$

Par exemple pour un coefficient de confiance de 95% on peut prendre : $\varepsilon = 1.96\ \sigma$ que l'on majorera plutôt par

$$(7') \qquad \varepsilon = 2\ \sigma$$

Ce qui pose un problème, ce n'est pas surtout de savoir si on peut utiliser ou non l'approximation normale, c'est de calculer σ.

B- *Calcul de la variance de l'estimateur*

a) Dans le cas où le processus $X(t)$ *est stationnaire du second ordre,* la fonction $Y[X(t)]$, que nous écrirons désormais $Y(t)$, l'est aussi et le calcul de la variance de l'estimateur est le suivant :

$$8) \qquad \sigma^2(Z_T) = \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T E\left[[Y_t - E(Y_t)][Y_s - E(Y_s)]\right] ds\, dt$$

Si $C(t)$ est la fonction d'autocorrélation centrée on trouve par un changement de variable :

$$(9) \qquad \sigma^2(Z_T) = \frac{2}{T}\int_0^T (1 - \frac{u}{T})\, C(u)\, du$$

Si $C(u)$ tend vers zéro plus vite que $\frac{1}{u}$ lorsque u tend vers l'infini, l'intégrale :

$$\int_0^T u\, C(u)\, du$$

est bornée et si on pose :

$$(10) \qquad A^2 = \lim_{T \to \infty} 2\int_0^T C(u)\, du$$

(9) s'écrit :

$$(11) \qquad \sigma^2(Z_T) \sim \frac{A^2}{T}$$

(5') et (7') s'écrivent respectivement :

$$(5'') \qquad \varepsilon = 4.5\, \frac{A}{\sqrt{T}}$$

$$(7'') \qquad \varepsilon = 2\, \frac{A}{\sqrt{T}}$$

b) Si le processus $X(t)$ est seulement asymptotiquement stationnaire du second ordre, l'équation (9) est fausse ; mais *nous allons chercher les conditions pour lesquelles, pour un processus homogène, le terme omis en remplaçant l'intégrale de* (8) *par l'intégrale de la fonction covariance*

centrée limite, est négligeable. [64]

Nous ferons ce calcul en supposant que $Y(t)$ prend un ensemble dénombrable de valeur. Il aurait été possible de démontrer la même propriété pour un ensemble non dénombrable d'états, mais cela n'aurait pas d'intérêt pour une simulation sur ordinateur.

Soit $P(j,t/i,s)$ la probabilité pour le système d'être à l'état E_j à l'instant t sachant qu'il est à l'état E_i à l'instant s. Le processus est homogène si cette probabilité ne dépend que de $t-s$.

$$P(j,t/i,s) = P(j,t-s/i,0)$$

Soit p_j la limite de $P(j,t/i,0)$ lorsque t tend vers l'infini. Cette limite est indépendante de i. Soit i_0 l'état initial :

Posons :

$$P(j,t/i,0) = p_j + p(j,t/i,0)$$

$$E\,[Z_T] = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_i y_i\,[p_i + p(i,s/i_0,0)]\ ds$$

$$E\,[(Z_T)^2] = \frac{2}{T^2} \int_0^T ds \int_s^T dt \sum_i \sum_j y_i\, y_j\,[p_i+p(i,s/i_0,0)]\,[p_j+p(j,t-s/i,0]$$

Après avoir simplifié par le terme $(\sum_i y_i\, p_i)\ (\sum_j y_j\, p_j)$ on trouve que $\sigma^2(Z_T)$ est la somme de trois termes que nous appellerons s_1, s_2 et s_3

$$s_1 = \frac{2}{T} \sum_i \sum_j y_i\, y_j\, p_i \int_0^T ds \int_s^T p(j,t-s/i,0)\ dt$$

$$= \frac{2}{T} \sum_i \sum_j y_i\, y_j\, p_i \int_0^T (1-\frac{s}{T})\ p(j,u/i,0)\ du$$

$$s_2 = -\frac{2}{T^2} \sum_i \sum_j y_j\, y_i \int_0^T p(i,s/i_0,0)\,[s\, p_j - \int_0^{T-s} p(j,u/i,0)\ du]\ ds$$

$$s_3 = -\frac{1}{T^2}\,[\int_0^T \sum_i y_i\ p(i,s/i_0,0)\ ds]^2$$

Une condition suffisante pour que les termes s_2 et s_3 soient négligeables est que (12-1) et (12-2) soient vérifiées.

(12-1) $\forall i,j \qquad \int_0^T p(i,s/j,0)\, ds < \infty$

(ce qui signifie que $E[Z_T]$ converge en $\frac{1}{T}$).

(12-2) $\forall i,j \qquad \frac{1}{T}\int_0^T s\, p(i,s/j,0)\, ds \underset{T\to\infty}{\to} 0$

Ces relations seront utiles ultérieurement. Si elles sont vérifiées on a :

$$\sigma^2(Z_T) \sim \frac{A^2}{T}$$

(13) avec $A^2 = \lim_{T\to\infty} 2 \sum_i \sum_j y_i\, y_j\, p_i \int_0^T p(j,u/i,0)\, du$

Remarque : si on remplace (12-1) par la condition :

$$\forall i,j \qquad \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T p(i,s/j,0)\, ds \underset{T\to\infty}{\to} 0$$

(ce qui signifie qu'on n'impose pas à $E[Z_T]$ de converger aussi vite que $\frac{1}{T}$), s_2 et s_3 sont bien négligeables, mais l'intégrale de (13) n'étant plus nécessairement convergente, la relation (11) n'est plus nécessairement vérifiée. Il faut la remplacer par :

$$\sigma^2(Z_T) \sim \frac{2}{T} \sum_i \sum_j y_i\, y_j\, p_i \int_0^T p(j,u/i,0)\, du$$

c) Si on ne sait pas calculer A mais si on sait démontrer que $T\,\sigma^2(Z_T)$ tend vers une limite A^2, on peut estimer ce coefficient en coupant la simulation en n tranches de longueur T_1. La moyenne dans la $i^{ème}$ tranche étant Z_i et la moyenne générale étant $Z_{n\,T_1}$, on évalue expérimentalement la variance de Z_{T_1} par la formule classique (voir annexe)

(14) estimation $[\sigma^2(Z_{T_1})] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_1^n Z_i^2 - n\, Z_{n T_1}^2\right]$

$$\sigma^2(Z_{T_1}) \sim \frac{A^2}{T_1}$$

donc : estimation $(A^2) = T_1$ estimation $[\sigma^2(Z_{T_1})]$

On peut ensuite utiliser cette estimation pour les formules (11) et (5) ou (7)

(11) donne $\sigma^2(Z_T) \sim \dfrac{T_1 \text{ estimation } [\sigma^2(Z_{T_1})]}{T}$

Dans le cas où $T = n\,T_1$ on obtient finalement

(5') donne : $\varepsilon = 4.5 \sqrt{\text{estimation } [\sigma^2(Z_{T_1})]}.\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(7") donne : $\varepsilon = 2 \sqrt{\dfrac{\text{estimation } [\sigma^2(Z_{T_1})]}{T}}.\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (15)

1ère remarque : On peut utiliser n tranches de longueur T_1 et ensuite utiliser l'estimation trouvée pour n'importe quelle valeur de T

Remarque : Cette estimation de $\sigma^2(Z_{T_1})$ n'est qu'approximative et suppose que l'on fasse l'hypothèse que les tranches de longueur T_1 sont telles que les moyennes dans chaque tranche sont mutuellement indépendantes. Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, c'est évidemment une estimation qui est mauvaise, et ce n'est pas tellement cela qu'il faut retenir de la méthode de LE GALL mais plutôt la théorie générale de l'existence de ce coefficient A^2.

d) Cas général LE GALL montre en utilisant le fait que le système est borné que : *l'espérance de l'estimateur centré tend vers 0 de la même façon que l'espérance du carré de cet estimateur centré et que les expressions suivantes :*

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\{[X(t) - E\,X(t)]\,[X(t') - E\,X(t')]\}\,dt\,dt'$$

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_t^T [P(j,t'/i,t) - P_j(t')]\,dt\,dt'$$

En général on ne sait pas calculer ces expresssions. On peut essayer de vérifier expérimentalement si elles convergent comme $\dfrac{A^2}{T}$ en estimant la variance de l'estimateur Z_{T_1} pour différentes valeurs de T_1 . La preuve n'est évidemment pas rigoureuse,mais cette vérification est en tous cas intéressante, car elle a l'avantage de nous donner des informations sur la convergence de Z_T. Quand on fait une simulation, on suppose en général

qu'il y a asymptotiquement stationnarité du second ordre et ergodicité stricte, mais il n'est jamais mauvais de le vérifier expérimentalement.

III.2 Les autres méthodes

L'idée de base de nombreux auteurs de simulation est qu'il faut absolument utiliser l'approximation normale et pour cela il faut se ramener à des mesures indépendantes. Cette optique est discutable en effet le coût de l'opération peut être supérieur au coût de l'évaluation de la variance de l'estimateur.

Un exemple d'application de cette idée, avec un coût très faible, mais un résultat assez hypothétique est la méthode de séparation en blocs "indépendants", qui est certainement la plus employée.

A Séparation en blocs indépendants [69]

Cette méthode est particulièrement intéressante car numériquement elle aboutit exactement au même résultat que LE GALL, en utilisant un raisonnement approximatif assez différent.

La méthode est la suivante : on sépare la simulation de longueur T en n blocs de longueur T_1. On considère ces blocs comme indépendants. Le résultat Z_T sera la moyenne des moyennes Z_i dans chacune des tranches. Formellement le résultat est donc inchangé. Le raisonnement pour la détermination de l'intervalle de confiance est alors le suivant. Ces blocs étant considérés comme indépendants, on estime la variance de la variable aléatoire dont une réalisation est Z_i par l'estimateur (13). On écrit ensuite que la variance de la moyenne arithmétique de n variables aléatoires de même loi est le quotient par n de la variance de chacune d'entre elles ; on utilise la loi des grands nombres pour affirmer que la moyenne arithmétique tend vers une variable normale, on applique donc la formule (7), et on arrive à la formule (15), c'est-à-dire à la même que celle qui est obtenue par LE GALL mais à partir d'un raisonnement sensiblement différent.

Ce raisonnement doit être utilisé avec précaution en effet LE GALL a démontré que la tendance vers la loi normale n'avait lieu que si le processus tendait vers une chaîne de Markov.

B Utilisation de l'analyse spectrale : [46], [47], [75]

LE GALL avait éliminé l'utilisation de l'analyse spectrale en raison du fait que les processus simulés ne sont connus qu'à partir d'une origine des temps et l'utilisation de l'analyse spectrale suppose une continuité de la fonction de covariance pour des temps négatifs. PARZEN [3] qui est spécialiste de la question dit qu'il n'y a pas de problème pour définir la transformée d'une fonction définie seulement pour des valeurs positives. Nous n'avons pas l'intention de discuter cette question, qui semble être un sujet "brûlant". Nous nous bornerons à signaler que l'utilisation de la transformée de Fourier simplifie parfois les calculs théoriques et qu'il faut alors remplacer la formule 11 par une formule (11') :

Si on appelle σ^2 la variance du processus : $\sigma^2 = C(0)$

Si f est la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation $\frac{C(u)}{\sigma^2}$, c'est-à-dire si :

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi \sigma^2} \int_0^\infty C(u) \cos \lambda u \, du$$

la limite de l'expression (10) s'écrit :

$$(11') \quad A^2 = \pi \sigma^2 f(0)$$

Remarque : Dans [46] et [47], Fishman introduit une notion intéressante, (qui pourrait être introduite sans utiliser l'analyse spectrale) *la notion de nombre équivalent d'observations indépendantes :*

Si on faisait n^* observations indépendantes et leur moyenne arithmétique, la variance de l'estimateur serait $\frac{\sigma^2}{n^*}$

Le nombre équivalent d'observations indépendantes est donc :

$$n^* = \frac{T}{\pi f(0)}$$

Si on considère un processus virtuel la fonction d'auto-corrélation vaut

$$\frac{C(u)}{\sigma^2} = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq \tau \leq \tau^* \\ 0 & si \quad \tau > \tau^* \end{cases}$$

on obtient pour ce processus virtuel : $f(0) = \frac{2}{\pi} \tau^*$

Donc en introduisant la notion de temps de corrélation

$$\tau^* = \frac{\pi}{2} f(0)$$

On obtient le résultat suivant : *le nombre équivalent d'observations indépendantes est la moitié du nombre de temps de corrélation :*

$$n^* = \frac{T}{2 \tau^*}$$

L'analyse spectrale peut certainement apporter des renseignements plus intéressants que le calcul du spectre à l'origine $f(0)$, et son application à la formule (11'), mais comme la justification de son utilisation pose un problème, FISHMAN lui-même semble avoir abandonné cette méthode au profit des deux suivantes : approximation par des schémas autoregressifs, utilisation des points de renouvellement.

c) Utilisation des points de renouvellement :

Une méthode nouvelle et particulièrement rigoureuse a été développée récemment par CRANE et IGLEHART [54 à 57] et FISHMAN [52]. Le principe consiste à séparer la simulation en périodes d'occupation et à utiliser le fait qu'il y a indépendance entre ces différentes périodes. Elles sont séparées par les périodes durant lesquelles la file est vide ; et l'évolution du système après un moment où la file est vide est indépendante de l'évolution du système avant. Les instants où la file redevient vide sont des points de renouvellement.

Le calcul se fait dans le cas où l'espérance de la durée de la période d'occupation est finie. Le principe du calcul est le suivant. Supposons qu'on veuille calculer l'espérance d'une fonction f du processus $X(t)$. Soit β_i les instants de régénération.

Calculons $Y_k = \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} f[X(s)] \, ds$

Soit $\alpha_k = \beta_{k+1} - \beta_k$

Les variables Y_k sont des variables indépendantes et de même loi. Nous dirons que cette loi est celle de la variable Y. Il en est de même des α_k. On démontre que l'espérance de la quantité cherchée $E[f(X)]$ est :

$$E[f(X)] = \frac{E[Y]}{E[\alpha]}$$

On peut donc estimer $E[Y]$ par la moyenne arithmétique des réalisations des Y_k, et $E[\alpha]$ par la moyenne arithmétique des réalisations des α_k.

L'inconvénient de cette méthode est d'allonger la simulation surtout dans le cas où les périodes d'occupations sont très longues. L'avantage est la rigueur parfaite du raisonnement. J'ai l'impression que cette méthode a permis de très jolis articles mais qu'elle n'aura pas un avenir aussi important que l'utilisation des schémas autorégressifs.

D) Utilisation des schémas autorégressifs : [49] [51]

On dit que le processus stochastique $X(t)$ a une représentation autorégressive d'ordre p s'il existe des coefficients réels b_s tels que :

$$\sum_{s=0}^{p} b_s \, (X(t-s) - E[X(t-s)]) = Y_t$$

où les Y_t sont des variables aléatoires indépendantes, de même distribution, de moyenne nulle et de même variance σ^2.

Dans des conditions assez générales les processus peuvent être approchés par des processus ayant une représentation autorégressive, et il est probable que l'utilisation de cette approximation est plus facile à justifier que l'utilisation de l'analyse spectrale. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de calculer immédiatement la variance de l'estimateur $\overline{X}_n$ moyenne arithmétique des X_n :

$$\sigma^2 (\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{\left(\sum_{s=0}^{p} b_s\right)^2} \times \frac{1}{n}$$

III.3 Détermination précise de l'intervalle de confiance pour la simulation M/

Considérons l'exemple de la file d'attente M/M/I. On a bien un processus de Markov. On a bien un processus asymptomatiquement stationnaire d'ordre deux. Nous allons appliquer III.1.*B.b*.

Calculons la variance de l'estimateur M_T moyenne temporelle de la longueur de la file, (formule (2) page 28), c'est l'estimateur correspondant à :

$$\begin{cases} E_i = \textit{(la file a une longueur i)} \\ y_i = i \end{cases}$$

Les probabilités de transitions solutions du système (1) page 22 s'écrivent [23] avec les notations du III.1

$$p_{ij} = (1-\rho)\rho^j$$

$$p(j,t/i,0) = \frac{b}{\pi}\,\rho^{\frac{1}{2}(j-i)}\int_0^{2\pi} [\sin(i\theta) - \sqrt{\rho}\sin(i+1)\theta]\,[\sin j\theta - \sqrt{\rho}\sin(j+i)\theta]\frac{e^{-w\tau}}{w}\,d\theta$$

avec $w = a + b - 2\sqrt{ab}\cos\theta$.

On vérifie donc (12).

(13) donne :

$$\sigma^2(M_T) = \frac{2}{T}\sum_i\sum_j ij(1-\rho)\rho^i\int_0^T p(j,t/i,0)\,dt$$

Il apparaît en remplaçant les $p(j,t/i,0)$ par leurs valeurs, sous le signe intégral les termes :

$$[\sum_i i\,\rho^{\frac{i}{2}}(\sin i\theta - \sqrt{\rho}\sin(i+1)\theta)]\,[\sum_j j\,\rho^{\frac{j}{2}}(\sin j\theta - \sqrt{\rho}\sin(j+1)\theta)] =$$

$$[\sum_i i\,\rho^{\frac{i}{2}}(\sin i\theta - \sqrt{\rho}\sin(i+1)\theta)]^2$$

Si nous utilisons la notation $Im[z]$ pour indiquer la partie imaginaire de z.

$$\sum_i i\,\rho^{\frac{i}{2}}\sin i\theta = Im\left[\sum_i i\rho^{\frac{i}{2}}\,e^{in\theta}\right]$$

$$= Im\,[\sum_i i\,(\sqrt{\rho}\,e^{i\theta})^n]$$

Posons $z = \sqrt{\rho}\, e^{i\,\Theta}$

Nous obtenons :

$$\sum_i i\,\rho^{\,i/2}\,[\sin i\,\Theta - \sqrt{\rho}\,\sin\,(i+1)\Theta] = Im\,[f(z)]$$

$$f(z) = \sum_i i(z^i - z^{i+1})$$

$$= z\,\Sigma\, i\, z^{n-1} - z^2\,\Sigma\, i\, z^{n-1}$$

$$= (z-z^2)\,\Sigma\, i\, z^{n-1}$$

$$= z(1-z)\,\frac{d}{dx}\,\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= \frac{z}{1-z}$$

$$Im\left[\frac{z}{1-z}\right] = Im\left[\frac{\sqrt{\rho}\,e^{i\,\Theta}}{1-\sqrt{\rho}\,e^{i\,\Theta}}\right]$$

$$= Im\left[\frac{\sqrt{\rho}\,e^{i\,\Theta}(1-\sqrt{\rho}\,e^{-i\Theta})}{1+\rho\ -2\,\sqrt{\rho}\,\cos\,\Theta}\right]$$

$$= \frac{Im\,[\sqrt{\rho}\,e^{i\,\Theta} - \rho]}{1+\rho\ -2\,\sqrt{\rho}\,\cos\,\Theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\rho}\,\sin\,\Theta}{1+\rho\ -2\,\sqrt{\rho}\,\cos\,\Theta}$$

$$= \frac{\sqrt{a\,b}\,\sin\,\Theta}{w}$$

Le carré est donc : $\dfrac{a\,b\,\sin^2\,\Theta}{w^2}$

$$\sigma^2\,(M_T) = \frac{2}{T}\ \ \frac{a}{\pi}\,(1-\rho)\int_0^T dt \int_0^{2\pi} \frac{a\,b\,\sin^2\,\Theta}{w^3}\,e^{-w\,t}\,d\,\Theta$$

On cherche la limite pour $T \to \infty$, on intervertitles sommations, ayant le droit de le faire à cause de la convergence et on obtient :

$$\sigma^2\,(M_T) \sim \frac{A^2}{T}$$

avec $A^2 = 4\ a\ b\ (\frac{b-a}{\pi}) \int_0^{2\pi} d\ \Theta \int_0^{\infty} \frac{sin^2\ \Theta\ e^{-wt}}{w^3}\ d\ t$

$$= 4\ a\ b\ \frac{(b-a)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{sin^2\ \Theta}{w^4}\ d\ \Theta$$

En faisant le changement de variable $u = tg\ (\frac{\Theta}{2})$

et en posant $c = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

on obtient $A^2 = \frac{32\ a\ b\ (b-a)}{\pi[\sqrt{a} + \sqrt{b}]^8} \int_0^{\infty} \frac{u^2(1+u^2)du}{(c^2 + u^2)^4}$

On peut décomposer l'intégrale B figurant dans cette expression en :

$$B = I_2 + (1- 2\ c^2)\ I_3 - c^2\ (1-c^2)\ I_4$$

si $I_n = \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+c^2)^n}$

On calcule les I_n par récurrence :

$$I_1 = \frac{\pi}{2\ c}$$

$$I_{n+1} = I_n\ \frac{2\ n-1}{2\ n}\ \frac{1}{c^2}$$

On obtient : $B = \frac{\pi\ (1+c^2)}{32\ c^5} = \frac{\pi}{16}\ \frac{(a+b)}{(b-a)^5}\ [\sqrt{a} + \sqrt{b}]^8$

$$A^2 = \frac{2\ a\ b\ (a+b)}{(b-a)^4}$$

L'équation (7") nous donne

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{a\ b(a+b)}}{(b-a)^2}\ \frac{1}{\sqrt{T}}$$

On peut majorer l'erreur relative d'estimation :

(2) devient :

(16) $Pr\ [|\frac{M_T - M}{M}| < \delta] > 95\%$

avec $M = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

$$\delta = \frac{2\sqrt{2}\ \sqrt{1+\rho}}{(1-\rho)} \times \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{T}}$$

On peut donner une expression de δ en fonction de N le nombre d'arrivées :

$$N \sim a\,T$$

$$\boxed{\delta = \frac{2\sqrt{2}\ \sqrt{1+\rho}}{(1-\rho)} \times \frac{1}{\sqrt{N}}} \qquad (17)$$

On peut faire un calcul analogue pour l'estimation de la probabilité de non attente P_0, qui est l'estimateur Π_T correspondant à :

$$y_0 = 1$$

$$y_i = 0, \text{ pour } i \neq 0.$$

Dans (13) le seul terme non nul correspond à $i = j = 0$

$$\sigma^2(\Pi_T) = \frac{2}{T}(1-\rho)\int_0^T dt \int_0^{2\pi} \frac{b}{\Pi}\,\rho\,\sin^2\Theta\,\frac{e^{-\omega t}}{\omega}\,d\Theta$$

$$A^2 = \frac{2\,b\,\rho\,(1-\rho)}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\Theta}{\omega^2}\,d\Theta$$

$$= \frac{32\,b\,\rho\,(1-\rho)}{\pi[\sqrt{a}+\sqrt{b}]^4}\int_0^{\infty}\frac{u^2\,du}{(1+u^2)}\,\frac{}{(c^2+u^2)^2}$$

L'intégrale B de cette expression s'écrit

$$B = \alpha_1\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2} + \alpha_2\,I_1 + \alpha_3\,I_2$$

avec $\alpha_1 = -\dfrac{1}{(1-c^2)^2}$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(1-c^2)^2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{c^2}{1-c^2}$$

on en déduit : $B = \frac{\pi}{4c(1+c)^2}$

$$A^2 = \frac{2\rho^2}{a}$$

$(7'') \rightarrow \varepsilon = 2\sqrt{2}\,\rho \times \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{T}}$

L'erreur relative d'estimation est majorée avec une probabilité de 95% par :

(18) $$\boxed{\delta = \frac{2\sqrt{2}\,\rho}{(1-\rho)} \times \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

Légende des figures 4 à 13 :

Simulations M/M/I

——— . ——— . ——— intervalle de confiance correspondant à une confiance de 95%.

——— résultat de la simulation classique.

- - - - - résultat de la simulation utilisant la méthode (1) (séparation en tranches).

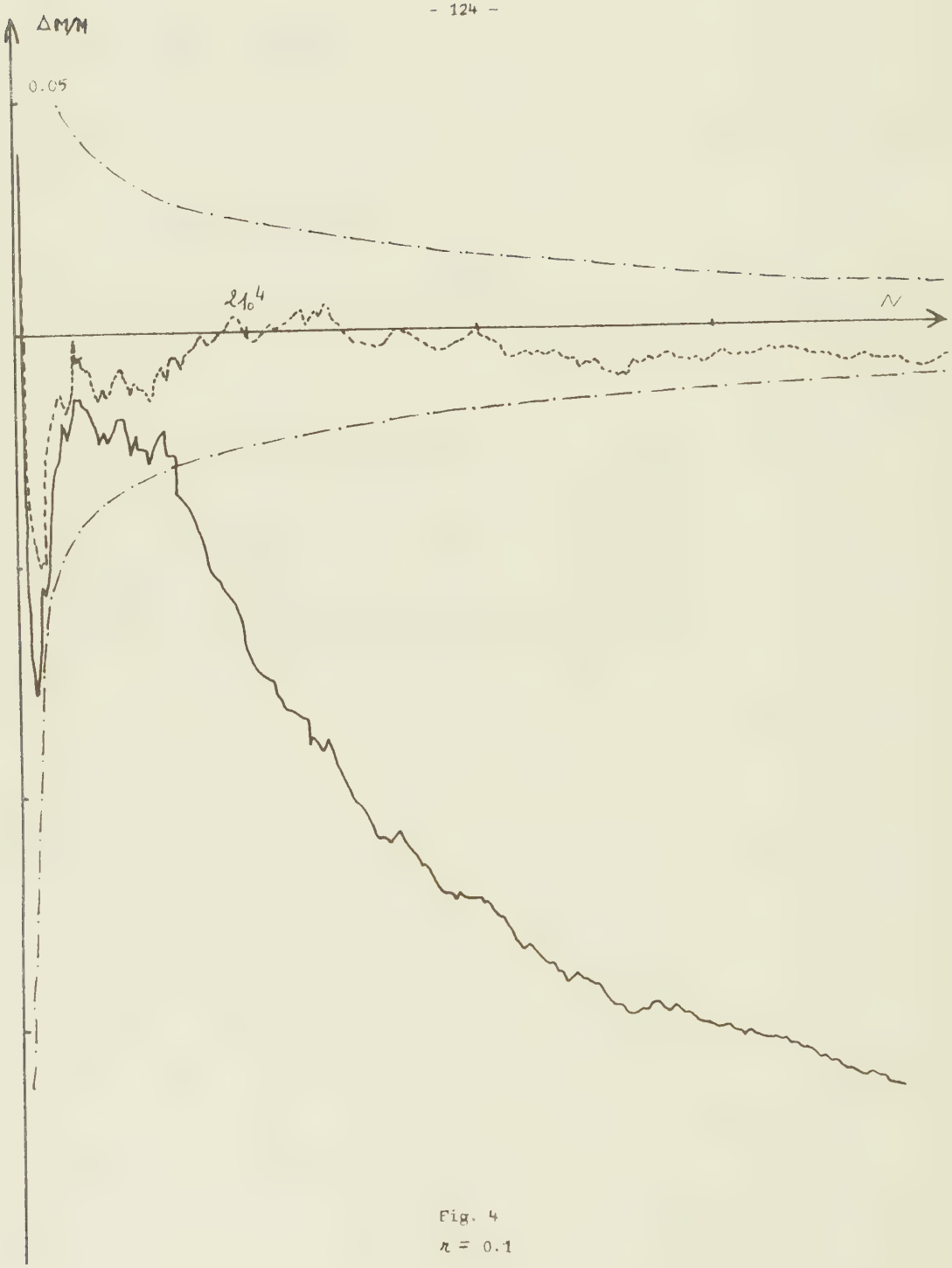


Fig. 4
$\pi = 0.1$

Fig. 5

$\pi = 0.2$

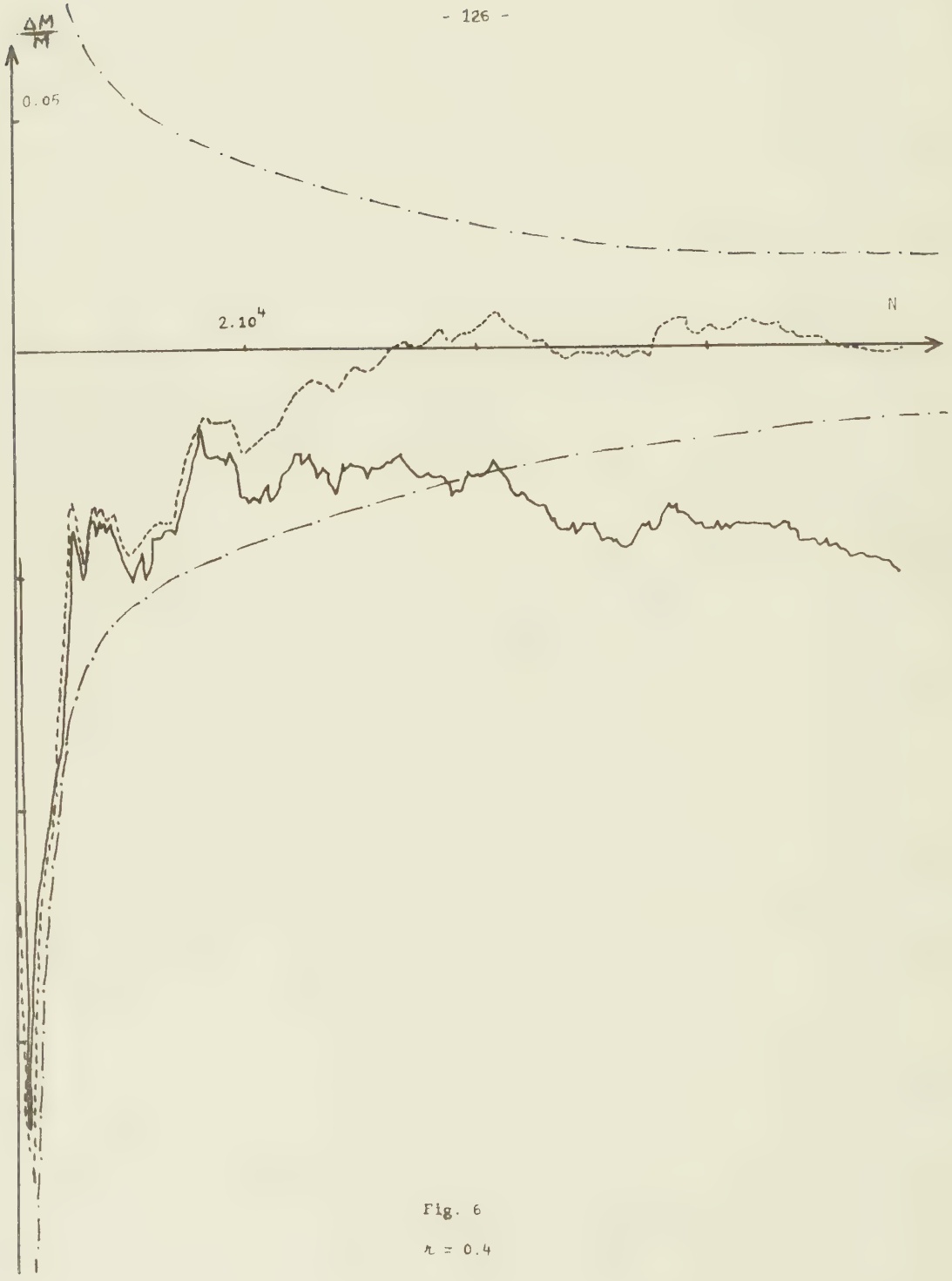


Fig. 6

$\pi = 0.4$

Fig. 7
$n = 0.3$

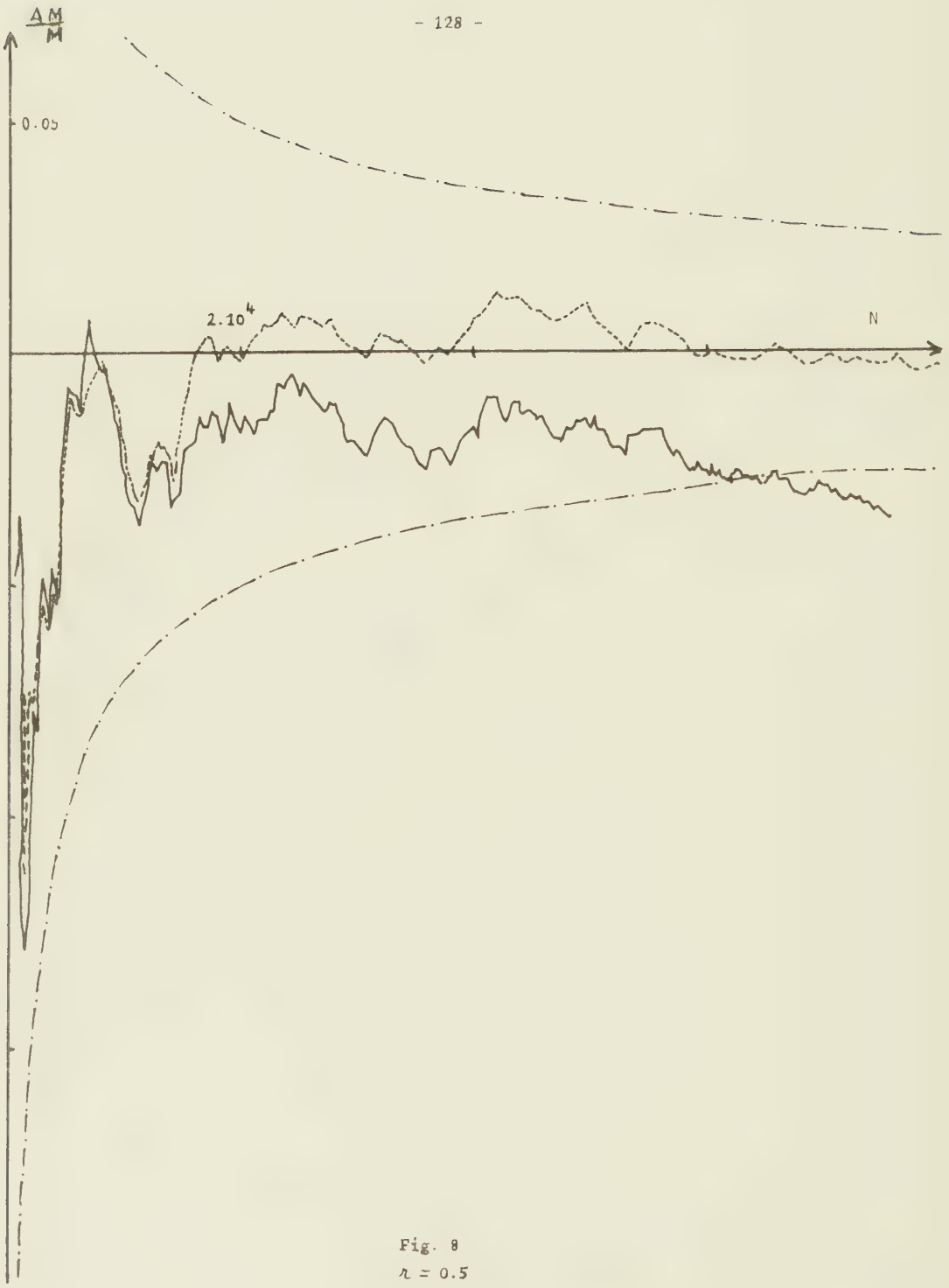


Fig. 8
$r = 0.5$

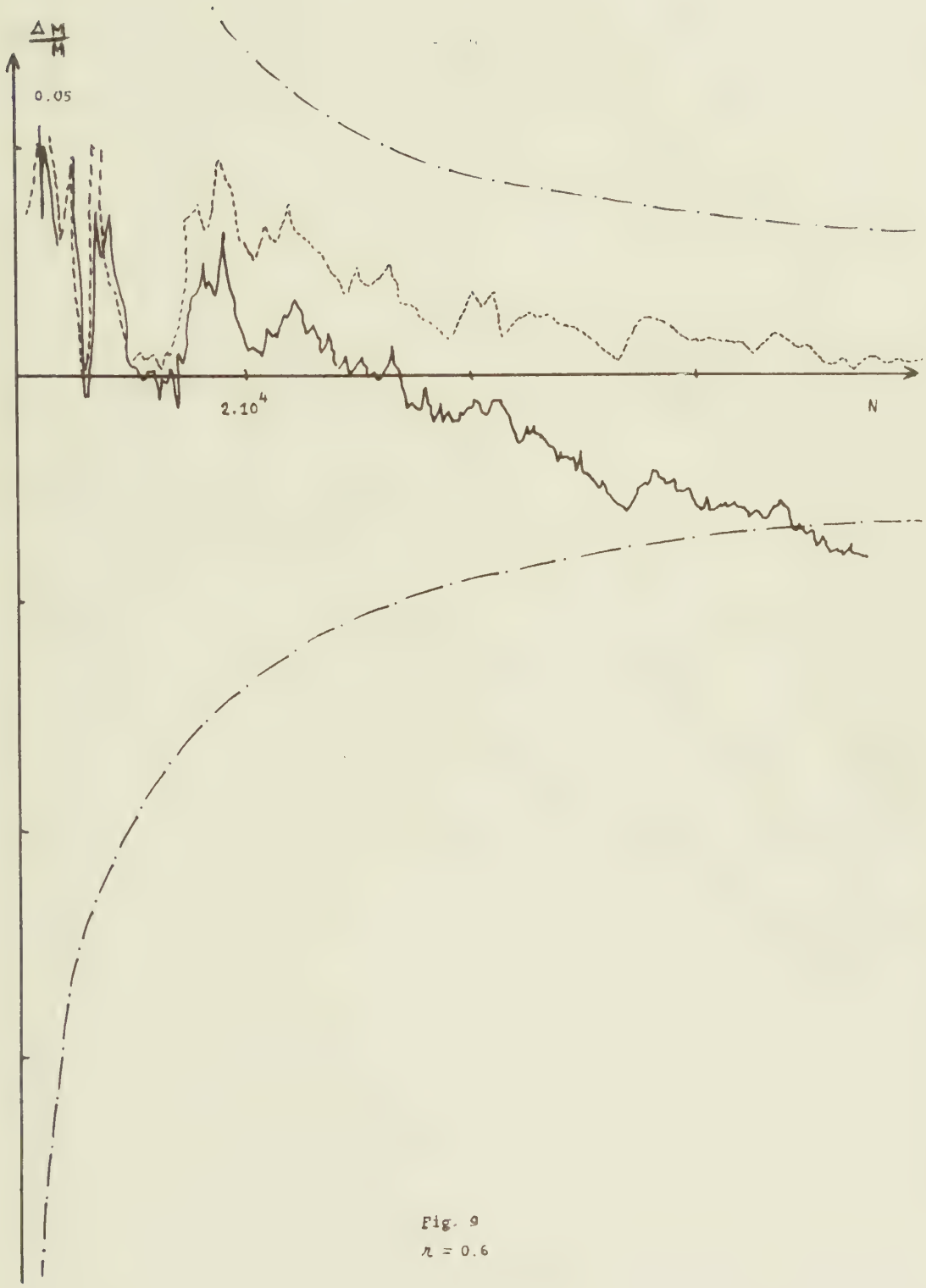


Fig. 9
$\pi = 0.6$

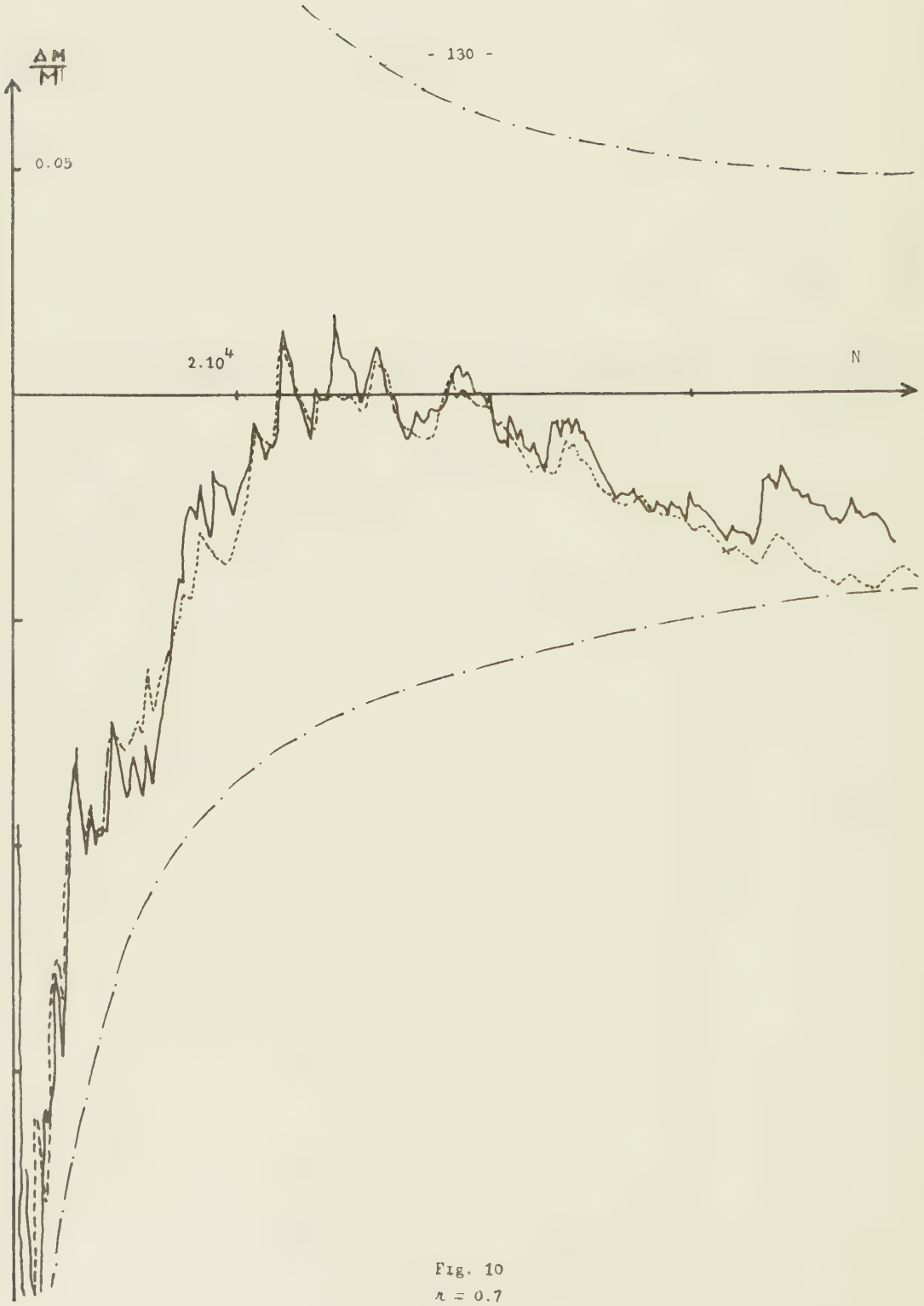


Fig. 10
$r = 0.7$

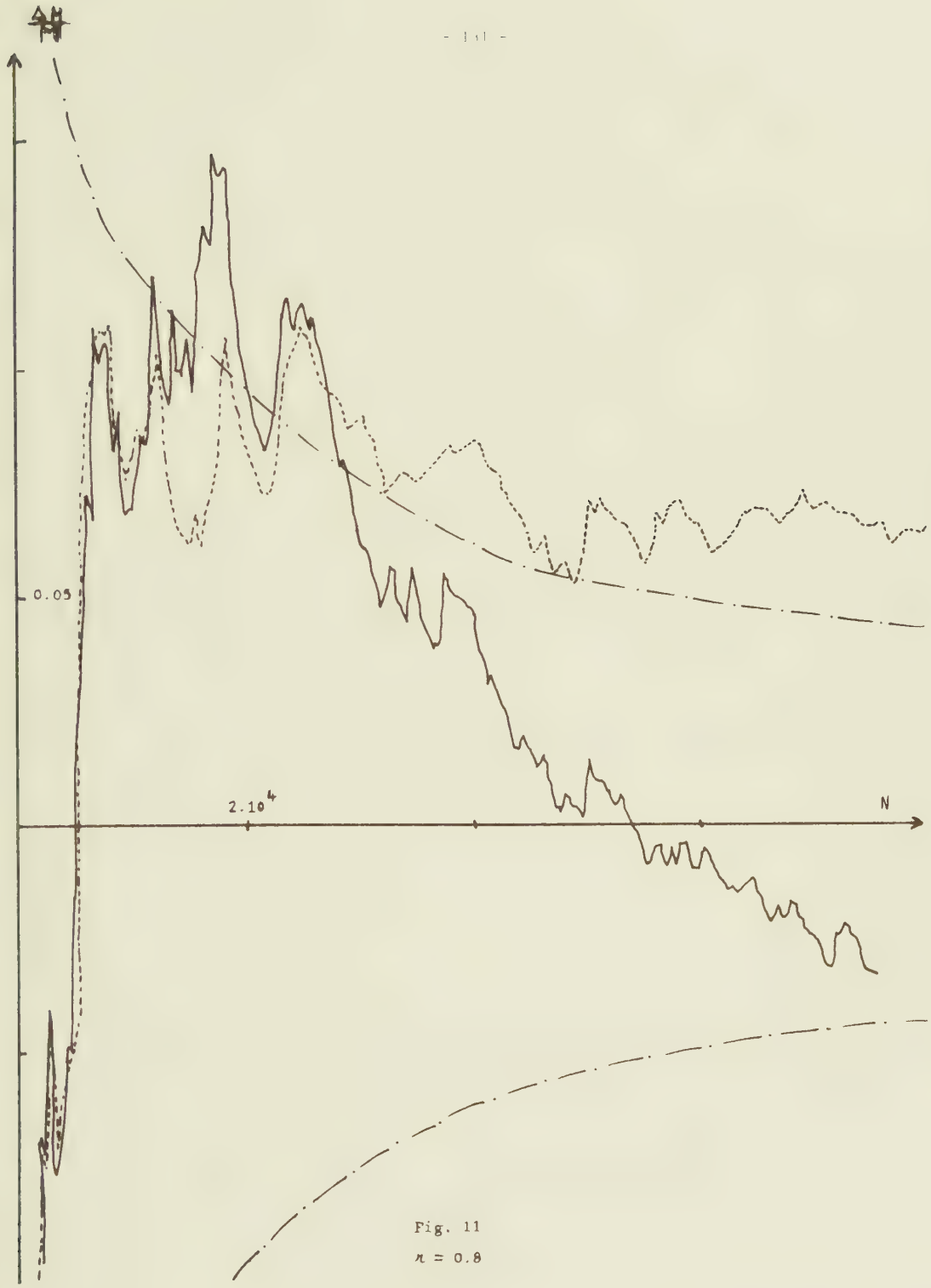
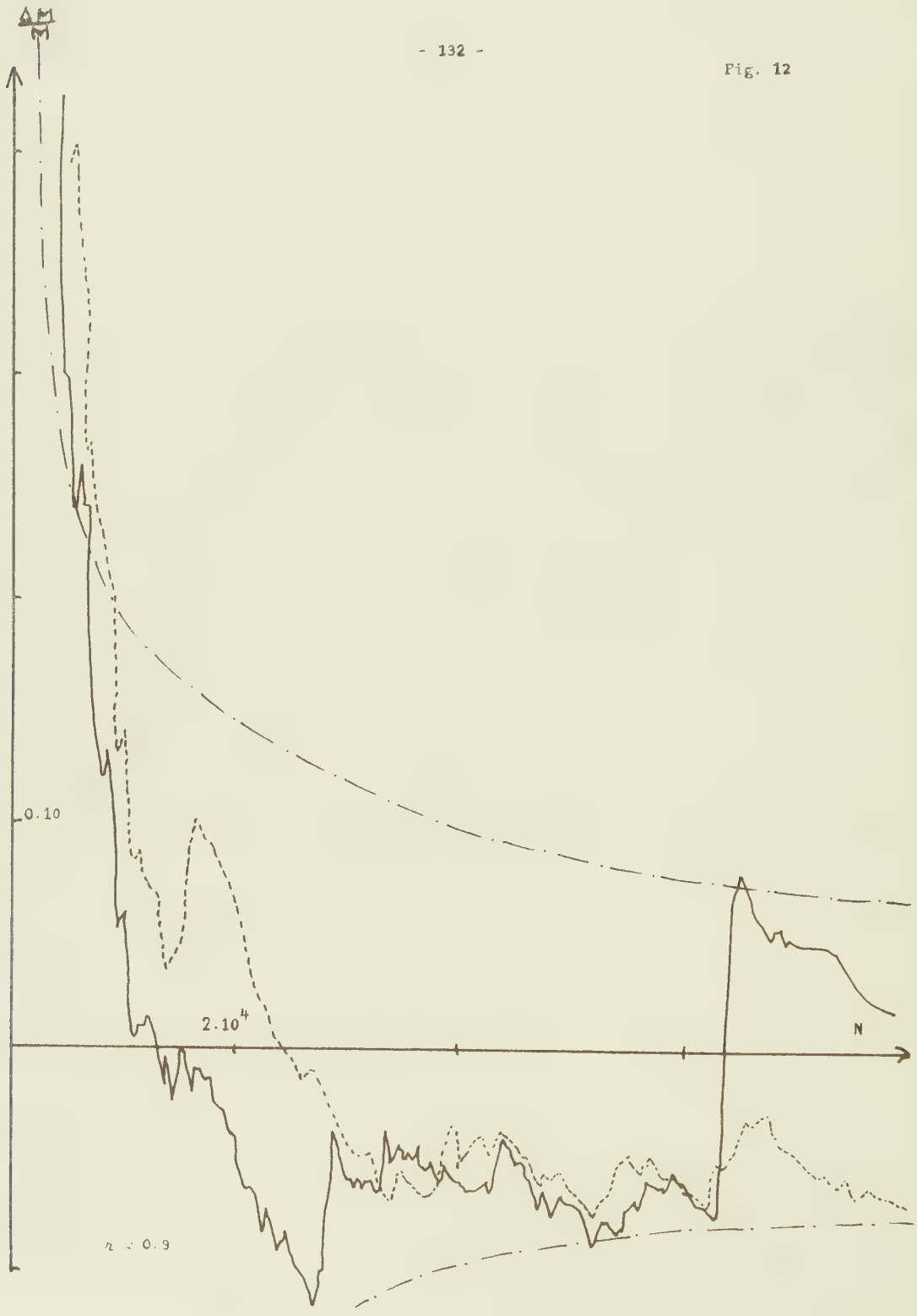


Fig. 11
$\pi = 0.8$

Fig. 12



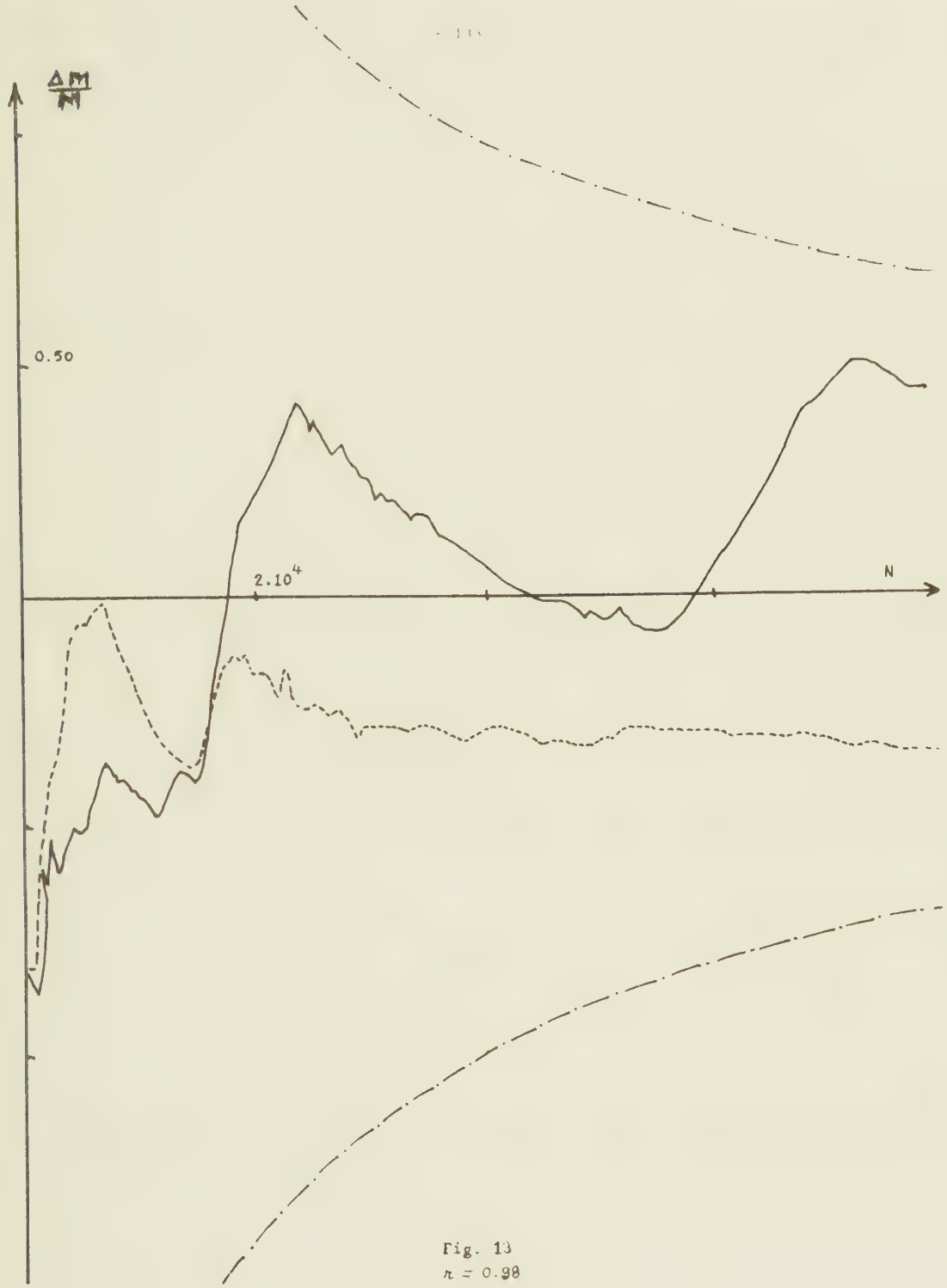


Fig. 13
$\pi = 0.98$

Rappel : *Estimation de la variance d'un échantillon*

Etant donné une variable aléatoire X et n échantillons indépendants $X_1 \ldots X_n$. Démontrons qu'un estimateur de la variance $V[X]$ est :

(1) estimateur $(V[X]) = \frac{1}{n-1} [\Sigma X_i^2 - \frac{1}{n} (\Sigma X_i)^2]$

ou encore :

(2) estimateur $(V[X]) = \frac{1}{n-1} [\Sigma X_i^2 - n(\bar{X})^2]$

en posant : $\bar{X} = \frac{1}{n} \Sigma X_i$

Démonstration :

$$E[\bar{X}] = E[X]$$

$$V[\bar{X}] = \frac{V[X]}{n}$$

De $X - \bar{X} = (X - E[X]) - (\bar{X} - E[X])$

on déduit :

(3) $\Sigma (X_i - \bar{X})^2 = \Sigma (X_i - E[X])^2 - n(\bar{X} - E[X])^2$

en effet $2 (\bar{X} - E[X]) \Sigma (X_i - \bar{X}) = 0$

De (3) on déduit :

$$E[\Sigma (X_i - \bar{X})^2] = n V(X) - n V(\bar{X})$$

$$= (n-1) V(X)$$

Donc une estimation de $V(X)$ est bien $\frac{1}{n-1} \Sigma (X_i - \bar{X})^2$ qui peut s'écrire comme (1) ou (2).

C H A P I T R E IV

Synthèse : durée optimale

IV.1 Synthèse de II et de III

IV.2 Applications aux simulations M/M/I

IV.3 Comparaison entre les différents algorithmes proposés au chapitre II.

IV.1 Synthèse : durée optimale

Nous avons vu au chapitre III que l'intervalle de confiance dépend de la durée de la simulation et diminue lorsque la durée de la simulation augmente. L'estimateur converge lorsque la durée de la simulation augmente.

Par contre au chapitre II nous avons vu que le biais du aux erreurs de troncature augmente lorsque la durée de la simulation augmente.

Il est donc important de comparer ces deux effets, et de chercher une éventuelle durée optimale pour la simulation. Nous allons chercher à minimiser la somme du biais et de l'intervalle de confiance. En fait en statistique on cherche souvent à minimiser ce qu'on appelle "mean square error", la somme de la variance et du biais. Justifions notre choix.
Le biais du aux troncatures peut s'écrire :

$$E\,[Z_T - Z'_T] = \beta$$

L'intervalle de confiance peut s'écrire :

$$Pr\,[|Z - Z_T| < \delta] \simeq 1-\eta$$

Il faudrait en toute rigueur calculer la variance de l'erreur de troncature, on écrirait alors :

$$Pr\,[\beta - \delta' < |Z_T - Z'_T| < \beta + \delta'] \simeq 1-\eta'$$

On écrirait alors :

$$(1)\quad \{|Z-Z_T|<\delta\} \cap \{\beta-\delta'<|Z_T-Z'_T|<\beta+\delta'\} \Rightarrow \{\beta-\delta-\delta'<|Z-Z'_T|<\beta+\delta+\delta'\}$$

Et comme les deux événements sont pratiquement indépendants (les écarts de l'estimateur autour de sa moyenne ne modifiant pas de façon sensible les erreurs de troncature), on a :

$$(2)\quad Pr\,[\{|Z-Z_T|<\delta\} \cap \{\beta-\delta'<|Z_T-Z'_T|<\beta+\delta'\}] \simeq (1-\eta)\,(1-\eta')$$

et (1) et (2) $\Rightarrow$ $Pr\,[\beta-\delta-\delta'<|Z-Z'_T|<\beta+\delta+\delta'] > (1-\eta)\,(1-\eta')$

Donc la quantité que nous devions considérer serait la somme des trois termes : $\beta + \delta + \delta'$. Mais en réalité δ' est négligeable devant les deux autres termes : la variance des erreurs de troncature étant faible. *Il est donc raisonnable de vouloir minimiser* $\beta + \delta$. *Nous appellerons cette quantité la "fonction précision."*

Nous avons vu que souvent :

$$(3) \quad \beta = B\,T$$

$$(4) \quad \delta = \frac{A}{\sqrt{T}}$$

Considérons la "fonction précision' ε :

$$\varepsilon = \frac{A}{\sqrt{T}} + B\,T$$

Cette fonction a une dérivée :

$$\varepsilon' = -\frac{A}{2}\,T^{-\frac{3}{2}} + B$$

Pour T positif, elle passe par un minimum pour une valeur T_{opt} de T.

$$(5) \quad T_{opt} = \left(\frac{A}{2B}\right)^{\frac{2}{3}}$$

La valeur minimum de α que nous appellerons α_{opt} est :

$$(6) \quad \varepsilon_{opt} = 3\left(\frac{A^2 B}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\,B\,T_{opt}$$

Théorème 6

Lorsque le biais du aux erreurs de troncature est proportionnel à la durée de la simulation (formule 3), et que l'intervalle de confiance pour la convergence de l'estimateur est proportionnel à la racine carrée de l'inverse de cette durée (formule 4) pour un coefficient de confiance $1-\eta$, *la "fonction précision" pour un coefficient de confiance pratiquement égal à* $1-\eta$ *passe par un minimum donné par la formule (6) pour une durée de simulation donnée par la formule (5).*

Ce théorème est très important car il prouve que contrairement aux idées habituelles les résultats d'une simulation ne s'améliorent pas toujours lorsque la durée de la simulation augmente.

Jusqu'à présent les personnes qui faisaient des simulations et qui ne trouvaient pas de bons résultats accusaient plutôt les nombres pseudo-aléatoires. A notre connaissance personne n'avait encore démontré l'importance des erreurs de troncature

IV.2 Applications aux simulations M/M/1

Appliquons le théorème précédent pour l'estimation de l'espérance de la longueur de la file M_T, et de la probabilité de non attente. En fait nous ne considérerons plus la durée de la simulation comme paramètre, mais le nombre N_a d'arrivées, nombre qui est plus significatif.

Remarque : $N_a \sim a\ T$

Pour la moyenne de la longueur de la file l'intervalle de confiance est :

$$\delta\ (M_{N_a}) = \frac{A_1}{\sqrt{N_a}} = \frac{2\sqrt{2}\ \sqrt{1+\rho}}{1-\rho} \times \frac{1}{\sqrt{N_a}}$$

Nous présentons dans le tableau 1 les résultats d'une estimation expérimentale du coefficient A_1 résultant d'une estimation de la variance de l'échantillon obtenu par simulation.

Pour calculer le biais du aux erreurs de troncature on peut considérer M_{N_a} comme la moyenne de $2N_a$ nombres de moyenne $M = \frac{\rho}{1-\rho}$. On peut donc appliquer les différentes formules obtenues au chapitre II.

Les résultats qui figurent sur le tableau et qui ont pour but de donner un ordre de grandeur des durées optimales et des précisions optimales correspondent à un coefficient $B_1 = 2.10^{-7}$. .En réalité nous avons vu que le coefficient B dépend beaucoup de l'algorithme étudié, et nous verrons au paragraphe suivant que la valeur de la précision optimale va nous permettre de choisir entre les différents algorithmes.

Le tableau II donne les résultats analogues pour la probabilité de non attente.

r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98
A_1 expérimental	3,6	4,4	5,5	6,6	7,7	10,2	12,2	18	X	X	X	X	X
A_1 théorique	3,3	3,9	4,6	5,6	6,9	8,9	12,3	19	39	49	65	99	200
$N_{opt} = [\frac{A}{4}10^7]^{2/3}$	40000	48000	52000	60000	68000	82000	100000	130000	220000	250000	300000	400000	600000
$\varepsilon_{opt} = 610^{-7}N_{opt}$	2,4%	2,9%	3,1%	3,6%	4,1%	5%	6%	7,8%	13,2%	15%	18%	24%	36%
$N \rightarrow \varepsilon = 10\%$	1200	1500	2000	3000	5000	7800	15000	35000	-	-	-	-	-

Tableau I MOYENNE DE LA LONGUEUR DE LA FILE

r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98
A_2 expérimental	0,28	1,20	1,6	2,2	3,2	5,5	7,6	11	23	30	39	55	120
A_2 théorique	0,31	0,71	1,25	1,9	2,9	4,3	6,8	11,5	25,5	32	44	68	140
$N_{opt} = (\frac{A10^7}{4})^{2/3}$	8000	18000	25000	29000	38000	50000	67000	93000	150000	185000	230000	350000	500000
$\varepsilon_{opt} = 6\ 10^{-7} N_{opt}$	0,5%	1,1%	1,5%	1,8%	2,3%	3%	4%	6%	9%	11%	14%	21%	30%
$N \rightarrow \varepsilon = 10\%$	(10)	(100)	(250)	(400)	900	1800	4600	13000	65000	-	-	-	-
$N \rightarrow \varepsilon = 5\%$	(40)	(400)	1000	1600	3600	7200	19000	-	-	-	-	-	-

Tableau II PROBABILITE DE NON ATTENTE

Les précisions optimales sont d'une faiblesse vraiment inquiétantes. *Si, pour une simulation aussi simple qu'une simulation M/M/I, les précisions optimales sont aussi faibles, quelle sera la précision optimale pour une simulation beaucoup plus compliquée, où le nombre d'opérations sera beaucoup plus grand, où la stationnarité ne sera même pas évidente, où le modèle sera approximatif... ?*

Il est essentiel de réduite le biais du aux troncatures. Nous avons présenté des méthodes pour celà, au chapitre II. La méthode de séparation en tranches, (méthode (I)) est déjà très efficace. Pour le prouver nous avons présenté p. 123-133 les courbes 1... 10, sur lesquelles nous portons les résultats obtenus en utilisant la méthode de séparation en tranches, et les résultats obtenus par l'algorithme classique. La démonstration est convaincante.

La conclusion essentielle est donc :

Conclusion : Lorsqu'on fait une simulation il est indispensable de prendre un grand soin des erreurs de troncature, sinon on court le risque d'obtenir des résultats avec une précision extrêmement mauvaise.

IV.3 Comparaison entre les différents algorithmes

Rappelons les différents algorithmes proposés :

$$(16) \quad \begin{cases} M_1 = a_1 \\ M_n = M_{n-1} + \mu_n \ (a_n - M_{n-1}) \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} M_1 = a_1 \\ M_n = M_{n-1} + \frac{1}{n} \ (a_n - M_{n-1}) \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} M_1 = a_1 \\ M_n = M_{n-1} + \frac{1}{n} \ (a_n - M_{n-1}) \quad \forall n \leq N \\ M_n = M_{n-1} + \frac{1}{N} \ (a_n - M_{n-1}) \quad \forall n \geq N \end{cases}$$

Au chapitre II nous avons démontré que l'algorithme (17) était meilleur que l'algorithme (5). Nous l'avons de plus vérifié expérimentalement. Donc nous allons comparer dans ce paragraphe l'algorithme (17) et les différents algorithmes (18) correspondant aux différentes valeurs de N. Puis nous discuterons l'utilisation d'autres algorithmes de la forme générale (16).

Nous ferons cette discussion pour des nombres a_n indépendants de répartition uniforme, d'espérance a et de variance $\sigma^2 = \frac{d^2}{12}$.

Nous voulons comparer les "fonctions précision" α_n correspondant à l'algorithme (17) et $\beta_{N,n}$ correspondant aux algorithmes (18) :

$$\alpha_n = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + E\,[a - M'_n]$$

$E\,[a - M'_n]$ est obtenu à l'aide du théorème (4) du chapitre (2)

$$\beta_{N,n} = 2\,\sigma(M_{N+(n-N)}) + E\,[a-M'_{N+(n-N)}]$$

$\sigma(M_n)$ et $E\,[a-M'_n]$ sont déduites du théorème (5) du chapitre (2). On peut utiliser les formules approchées, si N et $(n-N)$ sont assez grands. par exemple si : $N > 10^3$ et $n-N > 2.10^3$. En ce cas $\beta_{N,n}$ ne dépend presque que de N. Nous l'appellerons donc β_N. Nous avons donc trois problèmes à résoudre :

1- le choix de la valeur de n pour l'algorithme (17).

2- Pour l'algorithme (18) la "fonction précision" est indépendante de n (dans la mesure où n est nettement plus grand que N), mais le problème est le choix du paramètre N.

3- le choix entre les algorithmes (17) et (18)

Discussion du choix de N, le paramètre de l'algorithme (18)

D'après les formules (27) et (28) du chapitre II :

$$\beta_{N,n} \sim \sqrt{2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right) N$$

On trouve donc encore une formule analogue à celle du théorème 6. Le résultat est analogue :

On trouve une valeur optimale pour ce paramètre

$$(7)\quad N_{opt} = \left[\frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\varepsilon\left(1-\frac{1}{16}\right)}\right]^{\frac{2}{3}}$$

La valeur optimale de la "fonction precision" est :

$$(8)\quad \beta_{N_{opt}} = \frac{3\,\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right) N_{opt}$$

Théorème 7 : L'algorithme (18) donne une précision optimale pour un choix de N *correspondant à la formule (7) obtenue à partir de la formule (8). (Il faut naturellement faire la moyenne de* N+p *nombres où* p *est assez grand).*

Application numérique

Pour $\varepsilon = 16^{-5}$

Valeur de σ	N_{opt}	$\beta_{N_{opt}}$
$0.2 / \sqrt{3}$ $(d = 0.4)$	3219	4.3×10^{-3}
$1 / \sqrt{12}$ $(d = 1)$	5929	7.9×10^{-3}
1	13575	1.8×10^{-2}
10	63000	8.4×10^{-2}

Ces valeurs de N sont relativement faibles et la valeur de la fonction précision est assez bonne aussi.

Une question importante se pose : cet algorithme serait-il encore assez bon si on choisissait d'autres valeurs de N ? En effet lorsqu'on ne connait pas d'avance le résultat, on ne peut choisir N que d'une façon très empirique.

σ	N	β_N
$0.2 / \sqrt{3}$	10^4	6×10^{-3}
$0.2 / \sqrt{3}$	2.10^4	10^{-2}
$0.2 / \sqrt{3}$	3.10^4	1.4×10^{-2}
$1 / \sqrt{12}$	10^4	8.5×10^{-3}
$1 / \sqrt{12}$	2.10^4	1.2×10^{-2}
$1 / \sqrt{12}$	3.10^4	1.5×10^{-2}
1	10^4	1.86×10^{-2}
1	2.10^4	1.89×10^{-2}
1	3.10^4	2.16×10^{-2}
10	10^4	0.14
10	2.10^4	10^{-1}
10	3.10^4	8×10^{-2}

Conclusion : Si les nombres ont une variance forte il est très mauvais de choisir N trop petit.

Variations de α_n en fonction de n.

D'après le théorème (4) pour obtenir la formule donnant α_n il faut envisager différents intervalles :

$$n \leq n_1$$

$$n_1 < n \leq n_2$$

$$n_2 < n \leq n_3$$

$$n > n_3$$

Nous allons démontrer que si on considère uniquement l'intervalle $n \leq n_1$ il y a une valeur n_{opt} qui correspond à une précision optimale, puis nous démontrerons que cette précision optimale est meilleure que celle qui est obtenue pour tous les $n > n_1$. Donc nous aurons bien trouvé la valeur optimale de n.

Démonstration :

Pour $n < n_1$, α_n s'écrit :

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon}{4} (1 - \frac{1}{16})n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

Le minimum de cette fonction correspondrait à

$$n_{opt} = \left(\frac{4\sigma}{\varepsilon(1 - \frac{1}{16})} \right)^{\frac{2}{3}} \qquad (9)$$

Démontrons déjà que $n_{opt} < n_1$

Il suffit de démontrer que : $\frac{n_{opt}\,\varepsilon}{d} < 0.404$

En remplaçant σ par $\frac{d}{\sqrt{12}}$, nous voyons que :

$$\frac{n_{opt}\,\varepsilon}{d} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}(1 - \frac{1}{16})} \right]^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Donc il suffit de démontrer que :

$$\frac{\varepsilon}{d} < (0.404)^3 \times 1.15$$

$$\frac{\varepsilon}{d} < 8$$

Il faudrait une machine ayant bien peu de chiffres significatifs ou des nombres ayant une variance bien extraordinairement grande pour que ceci ne soit pas vérifié.

En réalité il est clair que ;

$$\frac{\varepsilon}{d} << 8 \qquad (10)$$

donc

$$n_{opt} << n_1 \qquad (11)$$

$$\alpha_{n_1} = A\, n_1 + \frac{B}{\sqrt{n_1}}$$

$$= A\, n_{opt} \times \frac{n_1}{n_{opt}} + \frac{B}{\sqrt{n_{opt}}} \sqrt{\frac{n_{opt}}{n_1}}$$

Posons : $D = A\, n_{opt} = \frac{B}{2\sqrt{n_{opt}}} = \frac{\alpha_{n_{opt}}}{3}$ (12)

$$\alpha_{n_1} = D \frac{n_1}{n_{opt}} + 2D \sqrt{\frac{n_{opt}}{n_1}}$$

des relations (11) et (12) on déduit deux propriétés :

1) α_{n_1} est à peu près égale au terme du au biais

2) $\alpha_{n_1} >> \alpha_{n_{opt}}$

Donc le terme du au biais en n_1 est très supérieur à $\alpha_{n_{opt}}$. D'autre part le biais est croissant avec n donc il restera très supérieur à $\alpha_{n_{opt}}$ pour des valeurs de n supérieures à n_1. n_{opt} est bien la valeur optimale, non seulement sur l'intervalle $[0,n_1]$ mais pour tout n. Nous présentons sur les figures 1 à 6 les variations de α_n en fonction de n. Les figures 1 et 2 correspondent avec les échelles différentes à $d = 0.4$. Les figures 3 et 4 correspondent à $d = 1$, et les figures 5 et 6 à $d = \sqrt{12}$.

Théorème 8

Sauf si la condition (10) *n'est pas vérifiée, la "fonction précision" pour l'algorithme* (17) *passe par un minimum pour une valeur de* n *donnée par la formule* (9) *et la valeur optimale de la fonction précision est donnée par la formule* (13) :

$$(13) \qquad \alpha_{n_{opt}} = 3\, \frac{\varepsilon}{4}\, (1 - \frac{1}{16})\, n_{opt}$$

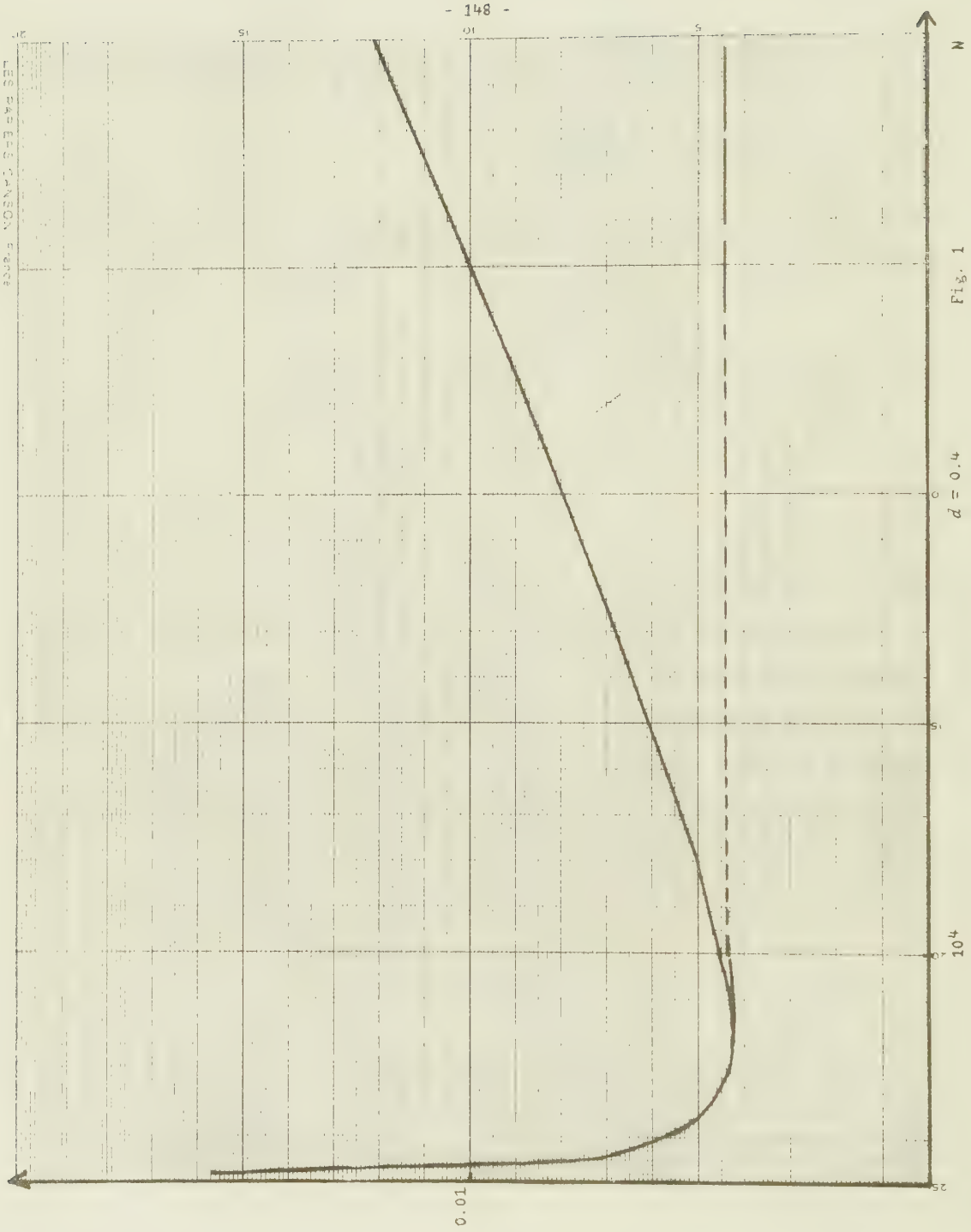


Fig. 1

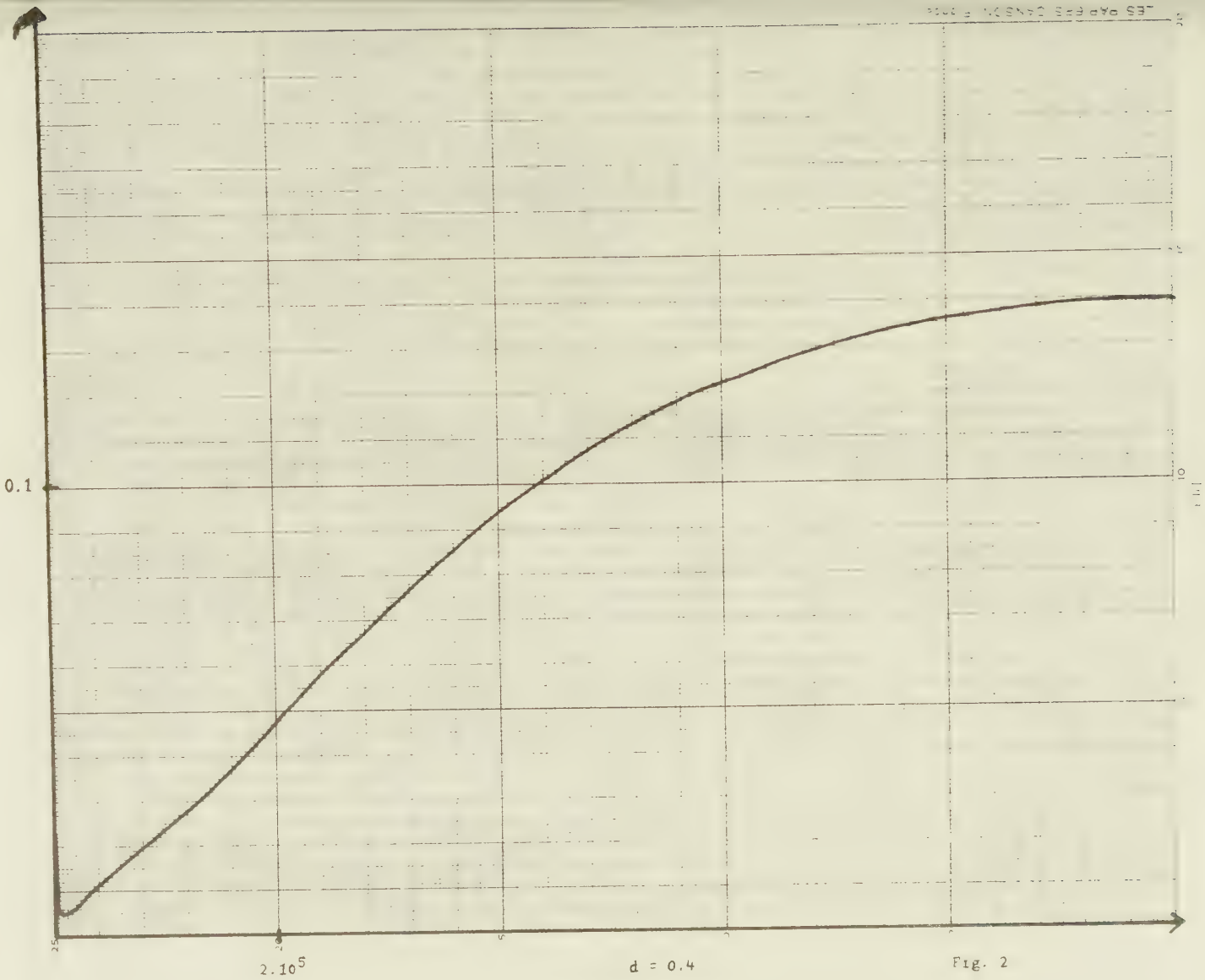


Fig. 2

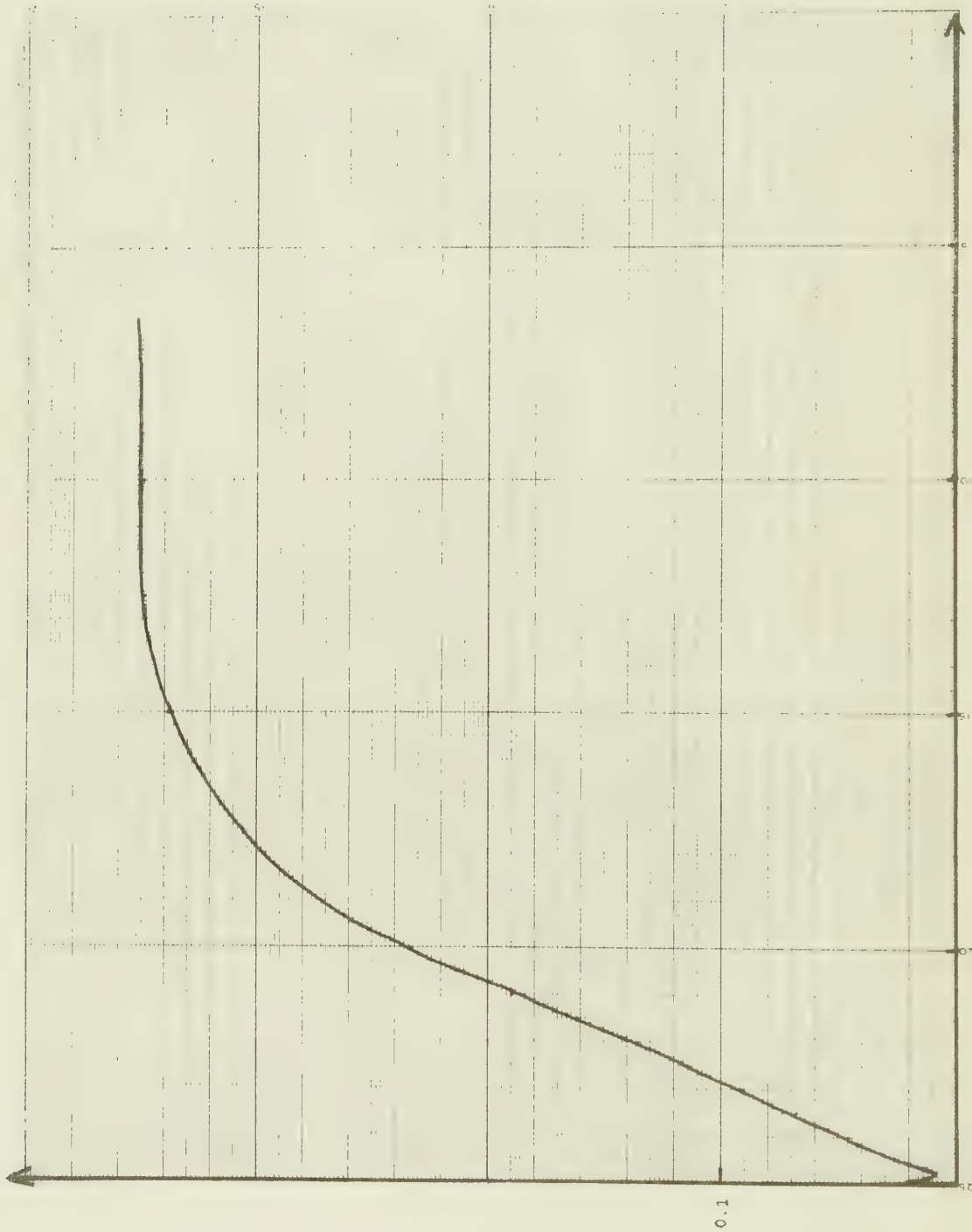
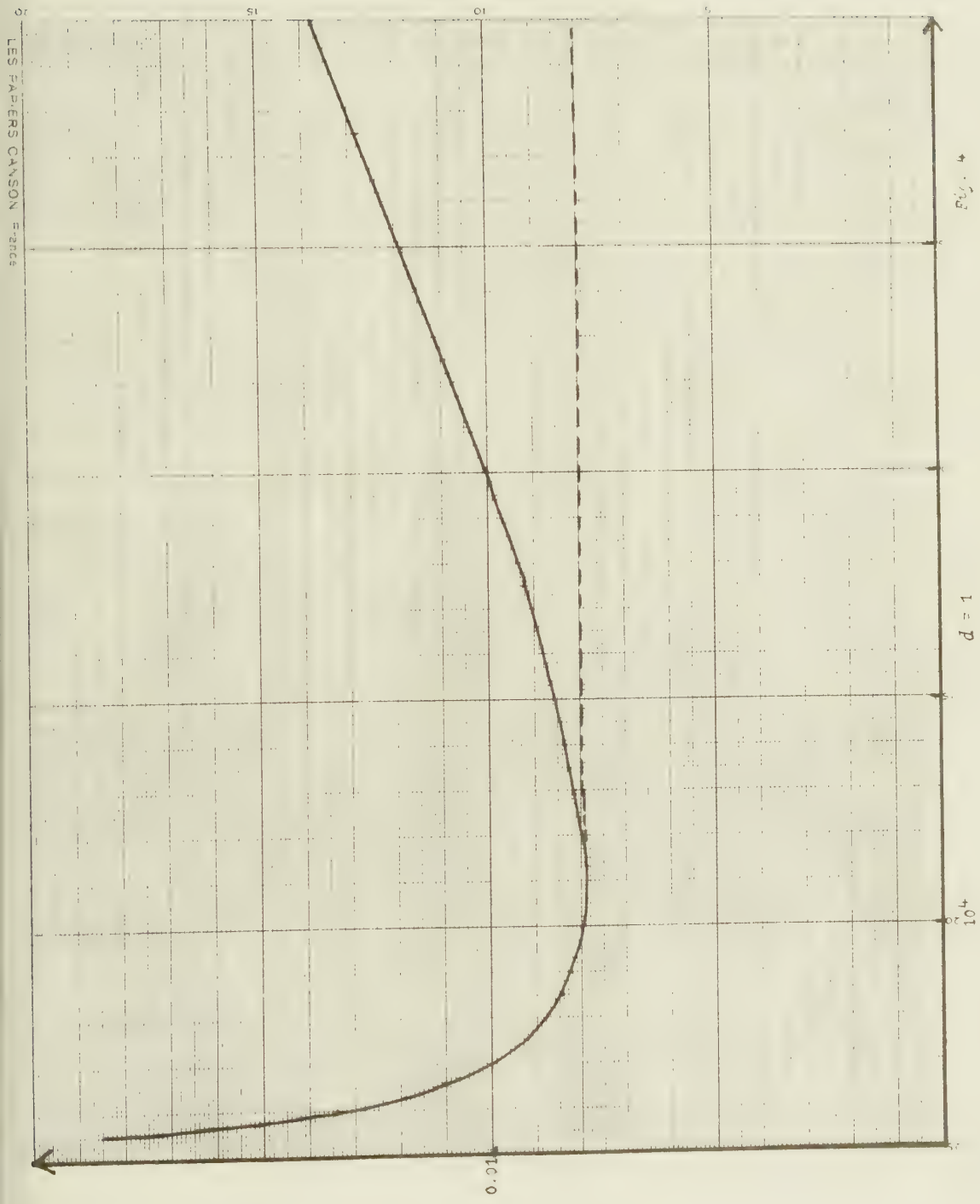


Fig. 3


LES PAPIERS CANSON France
0.01
d = 1
10⁴

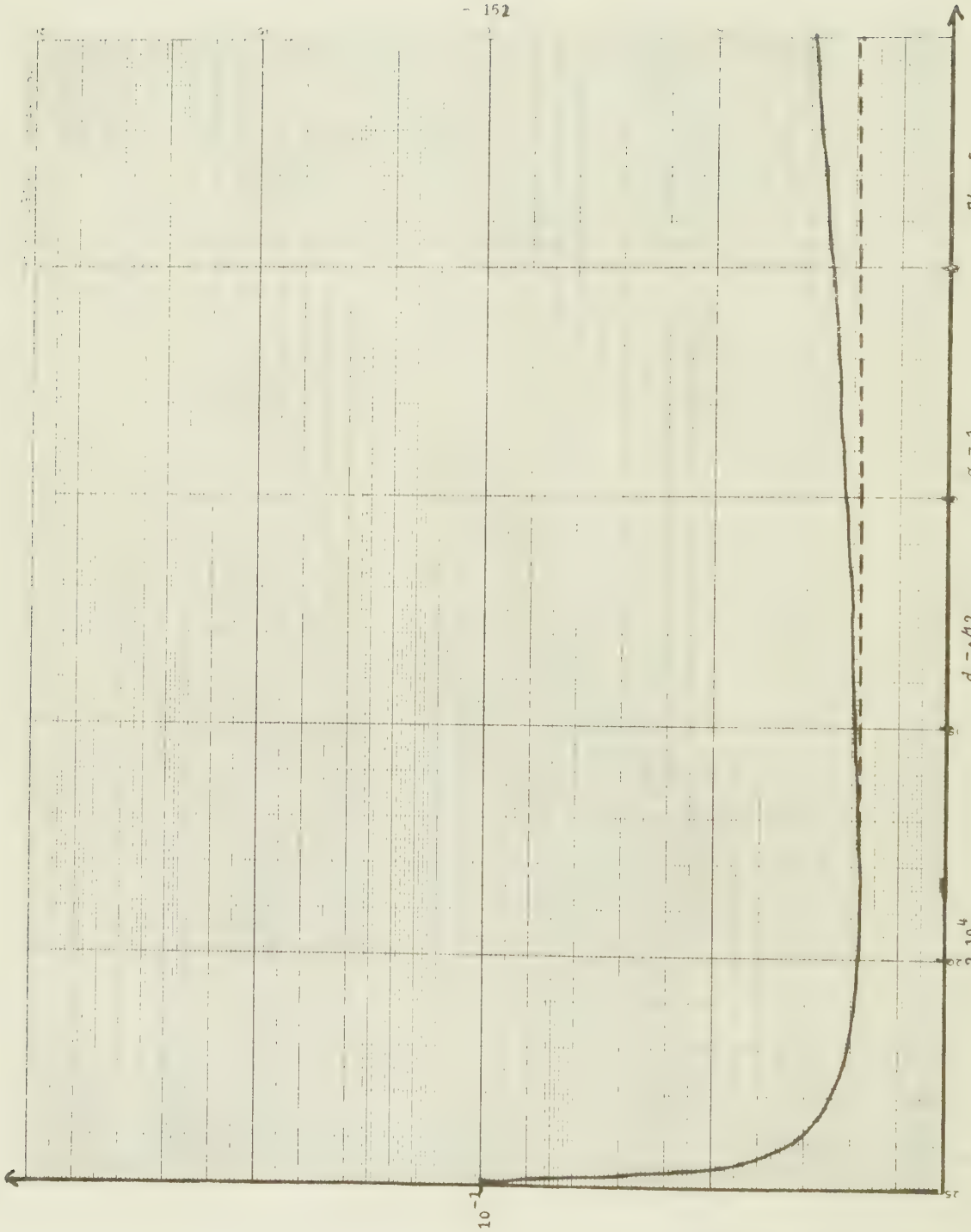


Fig. 5

Fig. 6

Comparaison entre les algorithmes(17) et (18)

D'après les théorèmes précédents il apparaît que :

$$n_{opt} = 2\,N_{opt}$$

$$\alpha_{n_{opt}} = \beta_{N_{opt}}$$

Théorème 9 :

Si les algorithmes (17) *et* (18) *sont utilisés de façon optimale, ils correspondent à la même valeur de la "fonction précision". On peut donc se fixer comme objectif d'utiliser l'algorithme* (17) *en faisant la moyenne de* n_{opt} *nombres* a_n, *ou bien on peut se fixer comme objectif d'utiliser l'algorithme* (18), *on a alors un biais et une variance qui sont constants quels que soient le nombre* n *des* a_n *utilisés, et qui ne dépendent que du choix du paramètre* N, *et on doit choisir ce paramètre* N *de façon optimale.*

$$\underline{n_{opt} = 2\,N_{opt}}$$

Remarque :

Ce théorème étant démontré, le problème pratique est de déterminer les valeurs optimales lorsqu'on a une moyenne à calculer. En fait on ne travaillera jamais exactement dans les conditions optimales, mais on peut déterminer un intervalle tel que si le paramètre appartient à cet intervalle, la fonction précision aura une valeur raisonnablement bonne. Le meilleur algorithme sera celui pour lequel cet intervalle sera le plus facile à déterminer. Notre expérience nous a montré que c'était l'algorithme (18).

Pour une valeur de σ et une valeur de n nous donnerons les deux valeurs entre lesquelles il suffit de choisir N pour avoir un résultat avec l'algorithme (18) au moins aussi bon qu'avec l'algorithme (17).

σ	n	α_n	domaine de N
$0.2 / \sqrt{3}$	10^4	0.43×10^{-2}	$3000 < N < 5000$
$0.2 / \sqrt{3}$	10^5	0.22×10^{-1}	$N < 4.9 \times 10^{-4}$
$0.2 / \sqrt{3}$	10^6	0.14	N quelconque
$1 / \sqrt{12}$	10^4	$8. \quad 10^{-3}$	$5000 < N < 7000$
$1 / \sqrt{12}$	10^5	0.24×10^{-1}	$N < 5 \times 10^{-4}$
$1 / \sqrt{12}$	10^6 ($N_1 = 1048576$)	0.23	N quelconque
1	10^4	2.2×10^{-2}	$5.10^3 < N < 3 \times 10^4$
1	10^5	$2.9 \quad 10^{-2}$	$2500 < N < 5 \times 10^4$
1	10^6	0.22	N quelconque

Remarque :

Pour un calcul de la moyenne de nombres compris entre 4.8 et 5.2 ($\sigma = 0.2 / \sqrt{3}$) des intervalles de confiance de 0.43×10^{-2}, 0.22×10^{-1} ne sont malgré tout pas très bons.

C H A P I T R E V

Nombres aléatoires

V.1 Définition. Générateurs classiques.

V.2 Tests de qualité des nombres pseudo-aléatoires

V.3 Etude intrinsèque de la méthode congruentielle

a) pseudo-période

b) répartition des couples

c) treillis

V.4 Meilleures solutions

V.5 Choix de plusieurs suites de nombres pseudo-aléatoires

V.6 Résultats des simulations

Rappel 1. Comment se ramener à des nombres de distribution uniforme ?

Rappel 2. Tests classiques.

V.1 Définition

Pour faire des simulations on a dans de nombreux cas, besoin de connaitre une suite de nombres dépendant du hasard et suivant une loi donnée. On doit résoudre le problème suivant :

Etant donnée une variable aléatoire réelle X *de loi connue, par exemple de fonction de répartition* $F_X(x)$, *construire une suite de nombres* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *qui puissent être considérés comme un échantillon des réalisations de la variable aléatoire* X.

On ramène en fait le problème à la génération de nombres de répartition uniforme. (Voir en annexe le rappel 1)

Citons quelques-uns des générateurs classiques de nombres aléatoires de répartition uniforme.

a) Génération physique [90]

En couplant un ordinateur sur le récepteur d'un signal physique aléatoire et de loi uniforme, on obtient une suite aléatoire de très bonne qualité. On peut utiliser par exemple un émetteur de bruit de fond.

Cette méthode pose des problèmes pratiques, notamment le fait que les nombres pseudo-aléatoires ne soient pas utilisés en temps réel nécessite une gestion appropriée de la mémoire.

b) Des tables on été fabriquées et testées, mais elles sont à peu près inutilisables sur ordinateur à cause de la place mémoire qu'elles nécessitent, et de leur taille modeste (un million de chiffres aléatoires : RAND).

Pour obtenir des nombres reproductibles et utilisant peu de place mémoire, on fabrique des suites numériques itératives, de la forme :

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1} \ldots\ldots)$$

On appelle ces nombres, des nombres *pseudo-aléatoires*. Ils ne sont pas du tout aléatoires; ils ne dépendent en rien du hasard puisqu'on peut prévoir le nombre suivant lorsqu'on connaît les précédents; mais on choisit f pour qu'ils aient des propriétés analogues à celles des suites de nombres aléatoires.

c) Middle - square method

On veut générer* des nombres $x_n \in [0,1]$. On génère des nombres y_n de $2p$ bits et on pose $x_n = \frac{y_n}{2^{2p}}$

La méthode consiste à élever y_n au carré, on obtient ainsi un nombre qui a au plus $4p$ bits, et on ne garde que les $2p$ bits centraux, c'est-à-dire qu'on tronque les p bits de droite et de gauche.

Si $E(d)$ = partie entière de d.

$y_{n+1} = [E(y_n^2/2^p)] \bmod 2^{2p}$.

d) En général on cherche à générer des nombres y_n tels que y_{n+1} ne dépende que de y_n :

$$y_{n+1} = [f(y_n)] \pmod m$$

Il est naturellement plus simple de choisir une fonction f linéaire .

$$y_{n+1} = [ay_n + c] \pmod m$$

*Nous utilisons le terme *"générer"* car il est couramment utilisé, bien qu'il ne soit pas un mot français correct.

Ce générateur est pratiquement le seul qui soit utilisé par les personnes qui font des simulations.

y_n, a et c sont des entiers.

Cette suite admet une période en effet :

- y_n ne peut prendre au plus que m valeurs distinctes.Donc il existe des nombres p et q tels que : $y_{q+p} = y_q$
- la suite se reproduit à partir de y_{q+p} identiquement à ce qu'elle était à partir de y_q . Donc la suite y_n a une période qui est $\leq m$.

e) Méthode plus générale [120]

Afin d'obtenir une période plus grande on peut utiliser la relation :

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots a_k y_{n-k+1} \pmod m$$

exemple : série de Fibonacci :

$$y_{n+1} = (y_n + y_{n-1}) \mod m$$
$$y_0 = 0$$
$$y_1 = 1$$

Cette série se révélant être de mauvaise qualité des variantes ont été proposées : [91],

$$z_n = (z_{n-1} + z_{n-\ell}) \mod 2^h$$

- avec $\ell = 16$
- ou avec $\ell = 6$ et on définit :

$$y_n = z_{2n} \qquad [92]$$

- $z_n = z_{n-2} + z_{n-3} \mod p$

ou p est un nombre premier ne pouvant pas s'écrire sous la forme

$p \neq c^2 + 2\ 3\ d^2$ c et $d \in N^+$ [93]

V.2 Tests de qualité des nombres pseudo-aléatoires.

Les erreurs de troncature provoquent des biais importants pour les tests des nombres pseudo-aléatoires lorsque ceux-ci font intervenir des calculs de moyenne d'un grand nombre de nombres non entiers. C'est le cas en particulier du calcul des moments.

Nos calculs de biais ayant été extrêmement précis et n'ayant fait intervenir aucune autre hypothèse que celle de la répartition uniforme, ils peuvent être utilisés pour corriger les résultats de ces tests. (cf méthode (2) p. 60).

Les tests classiques sont rappelés en annexe. Cependant nous tenons à faire une remarque sur la rigueur des conclusions à tirer de ces tests.

Les suites numériques citées plus haut ne sont pas du tout aléatoires puisqu'elles sont même complètement déterministes. Mais en fait c'est le cas de beaucoup de suites. Par exemple les suites obtenues par lancement du dé obéissent à des lois physiques déterministes. Le problème très délicat est de définir le mot aléatoire.

Knuth [125-3]donne p. 142 une définition des suites infinies aléatoires, mais *comment tester les suites finies ?*

Il faut tester l'uniformité et l'indépendance.

En réalité on connaît des méthodes pour tester l'uniformité en supposant l'indépendance : test du χ^2, test de Kolmogorov Smirnov, et des méthodes plus ou moins qualitatives pour tester l'indépendance. *La méthode idéale serait de tester l'uniformité de la répartition de* x_n, *des couples* (x_n, x_{n+n_1}) *pour toutes les valeurs de* n_1, *des triplets* $(x_n, x_{n+n_1}, x_{n+n_2})$ *pour toutes les valeurs de* n_1 *et* n_2, ... *de tester la répartition des* p*-uples* $(x_n, x_{n+n_1}, \ldots x_{n+n_{p-1}})$ *pour toutes les valeurs des* n_i. *Mais*

il ne faudrait pas tester seulement la suite infinie, il faudrait en vérité tester les suites finies de différentes longueurs. (Il est très possible par exemple que si l'on considère la suite finie correspondant à une longueur d'une période, elle ait une moyenne très bonne mais que la suite correspondant à une demi -période ait une moyenne très différente).

Il y a des centaines d'articles qui présentent un générateur, et de bons résultats pour différents tests, (par exemple [116] fait des tests pour 25000 nombres et pour 100000 nombres) et d'autres articles qui critiquent les précédents [121]. En fait *je voudrais signaler un point qui me semble fondamental et qui est pratiquement passé sour silence dans la littérature : il n'est pas possible de justifier l'utilisation de nombres pseudo-aléatoires par des tests, aussi soignés soient-ils.* En effet même si on teste les couples, les triplets,... et les 10-uples, pour l'appartenance à des intervalles assez petits, et pour les N premiers nombres aléatoires, pour différentes valeurs de N, on ne pourra pas dire avec certitude "ce générateur est bon", ni "ce générateur est meilleur que cet autre générateur", en effet il est possible que les 11-uples aient une distribution totalement mauvaise, ou que pour des valeurs de N un peu plus grandes ou un peu plus petites,on ait trouvé des résultats très différents.

Il est préférable de connaître avec précision l'évolution des y_n. Seule une étude intrinsèque peut nous donner une certaine sécurité.

Pour la méthode congruentielle, qui est de très loin la plus utilisée par les personnes qui font des simulations,des théorèmes ont été démontrés donnant l'évolution exacte des valeurs y_n. Nous allons les résumer ici et en tirer des conséquences pratiques.

V.3 Etude intrinsèque des nombres obtenus par la méthode congruentielle

Considérons donc la suite :

$$y_{n+1} = [a\, y_n + c] \pmod m$$
$$x_n = \frac{y_n}{m}$$

a) Pseudo-période [89-1]

Citons déjà un résultat classique pour la période.

Théorème 1 Pour que la période soit m il faut et il suffit que :

1.- c et m soient premiers entre eux

2.- $a-1$ soit un multiple de tout diviseur premier de m

3.- si 4 divise m, 4 divise $(a-1)$

Remarque : Si la période est exactement m, toutes les valeurs de 0 à $m-1$ sont prises par y_n, on peut donc prendre une valeur initiale quelconque.

Conséquence immédiate :

Théorème 2.Lorsque $m = 2^\alpha$, $\alpha \geq 2$

pour que la période soit m il faut et il suffit que :

1.- c et m soient premiers entre eux

2.- $a \equiv 1 \pmod 4$

Autre théorème classique :

Théorème 3.Lorsque $m = 2^\alpha$, $\alpha \geq 4$ et $c = 0$.

La période maximale est $\frac{m}{4}$.

Pour que la période soit $\frac{m}{4}$ il faut et il suffit que :

1.- y_0 soit impair

2.- $a \equiv \pm 5 \pmod 8$

On a l'impression que la condition essentielle pour avoir une bonne suite de nombres pseudo-aléatoires est d'avoir une période maximale. En réalité ce n'est pas exact car on démontre le théorème suivant.

Théorème 4.Considérons la suite z_n caractérisée par $z_0 = 0$ et $c = 1$.

$$z_n = a\, z_{n-1} + 1 \pmod m$$

La suite y_n *se déduit de la suite* z_n *par une relation linéaire*

$$y_n = [u\, z_n + v] \pmod m.$$

$$u = y_0 (a-1) + c$$

$$v = y_0$$

Ceci se déduit de : $z_n = \frac{a^n-1}{a-1}$

et : $y_n = a^n y_0 + c\, \frac{a^n-1}{a-1}$

C'est donc la structure de la suite z_n qu'il faut étudier et z_n ne dépend que de a.

Théorème 5. Si a est premier avec m. La suite z_n est formée de ν blocs de t nombres, chaque bloc se déduisant du précédent par une translation b.

t est l'ordre multiplicatif de a modulo m, c'est-à-dire le plus petit entier t tel que $a^t \equiv 1 \pmod m$

$$b = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots a^{t-1}$$

ν est l'ordre additif de b c'est-à-dire le plus petit entier tel que $\nu b \equiv 0 \pmod m$

La période est νt, mais il y a en réalité une pseudo-période t

Exemple : * Pour $m = 2^\alpha$ et $a \equiv 1 \bmod 4$

$$t = \frac{m}{pgcd\ (a-1, m)}$$

La valeur maximale de t est $\frac{m}{4}$ elle est atteinte à condition que $\frac{a-1}{4}$ soit premier avec $\frac{m}{4}$: $a \equiv 5 \bmod 8$

si a s'écrit :

$a = + 1 + k\, 2^\beta$ k étant impair

$t = \frac{m}{2^\beta} = 2^{\alpha-\beta}$

$a \equiv 9 \pmod{16}$ pseudo période $\frac{m}{8}$

$a \equiv 17 \pmod{32}$ pseudo période $\frac{m}{16}$

* Pour $m = 2^{\alpha}$ et $a \equiv 3 \mod 4$

$$t = \frac{m}{pgcd\ (a+1, m)}$$

La valeur maximale de t est $\frac{m}{4}$ elle est atteinte à condition que $\frac{a+1}{4}$ soit premier avec $\frac{m}{4}$: $a \equiv 3 \mod 8$

Si a s'écrit

$a = -1 + k\ 2^{\beta}$ k étant impair

$t = \frac{m}{2^{\beta}} = 2^{\alpha-\beta}$

$a \equiv 7 \pmod{16}$ pseudo-période $\frac{m}{8}$

$a \equiv 15 \pmod{32}$ pseudo-période $\frac{m}{16}$

Conclusion pratique :

C'est la pseudo-période qui est importante et non la période, en effet la valeur de la constante de translation ne nous intéresse pas beaucoup. On ne peut pas dire qu'il soit tellement préférable d'avoir 4 blocs de longueurs $\frac{m}{4}$, un bloc se déduisant d'un autre par translation, plutôt que d'avoir un seul bloc de longueur $\frac{m}{4}$ (la translation étant de longueur nulle). *Ceci justifie l'utilisation d'un générateur congruentiel avec une constante c nulle :*

$$y_{n+1} = [a\ y_n] \pmod{m}$$

Par contre *quelque soit le coefficient c utilisé il est essentiel d'avoir une pseudo-période maximale* ($= \frac{m}{4}$) *donc de choisir*

$$a \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod{8}$$

Remarque : Pour $m = 2^{\alpha}$ ce serait donc une erreur de croire qu'il vaut mieux prendre $a \equiv 1 \mod 8$ que $a \equiv 3 \mod 8$ pour avoir une période maximale (m). En réalité dans le premier cas on a au moins 8 blocs de au plus $\frac{m}{8}$ termes, un bloc étant déduit des précédents par translation, alors que dans le deuxième cas on a 4 blocs de $\frac{m}{4}$.

Il est raisonnable si on choisit $c \neq 0$, afin d'avoir une période maximale et une pseudo-période maximale

de choisir c impair

$a \equiv 5 \pmod 8$

Si on veut gagner du temps et prendre $c = 0$, il faut choisir

$a \equiv 3$ ou $5 \pmod 8$

b) Calculs d'estimateurs de l'indépendance et de l'uniformité

Dieter [89-2] a étudié :

- l'erreur commise sur la fréquence d'appartenance du couple (x_n, x_{n+1}) à un intervalle $[s_1, s_2) \times [t_1, t_2)$

$$\Delta N(n, s_1, s_2, t_1, t_2) = \#(i: s_1 \leq x_i < s_2,\ t_1 \leq x_{i+1} < t_2,\ i \leq n) - n(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)$$

- le coefficient de corrélation d'ordre s :

$$\rho_s = \frac{E[(x_{i+s} - E(x_n))(x_i - E(x_n))]}{E[x_i - E(x_n)]^2}$$

- l'erreur commise sur la fréquence d'apparition des permutations de 3 nombres :

Considérons x_i , x_{i+s} , x_{i+t}

$s \neq 0$, $t \neq 0$, $s \neq t$.

Les 6 permutations possibles sont :

$$x_i < x_{i+s} < x_{i+t}$$

$$x_i < x_{i+t} < x_{i+s}$$

$$x_{i+s} < x_i < x_{i+t}$$

$$x_{i+s} < x_{i+t} < x_i$$

$$x_{i+t} < x_{i+s} < x_i$$

$$x_{i+t} < x_i < x_{i+s}$$

Chacune de ces permutations devrait avoir une fréquence relative de $\frac{1}{6}$.
Il est donc intéressant de mesurer :

$$\Delta A(s,t) = \#\,(i; i \le n, x_{i+s} < x_i < x_{i+t}) - \frac{n}{6}$$

Le calcul étant fait pour des valeurs de s et t petites non nulles et distinctes.

Dieter démontre que ces fonctions sont des sommes de termes de la forme :

$$s(a,p \,/\, x,y)$$

où p est la pseudo période

et où $s(a,p \,/\, x,y) = \sum_{\mu=0}^{|p|-1} ((\frac{\mu+y}{p}))\ ((a\,\frac{\mu+y}{p} + x))$

avec $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si $x \not\equiv 0 \bmod 1$

$((x)) = 0$ si $x \equiv 0 \bmod 1$

Il démontre que ces sommes sont majorées par :

$D(a,p) = \frac{1}{12}\ (\sum_{i=0}^{k} |\, q_i \,| + 3\,k + 5)$

où les q_i et k sont déterminés par l'algorithme E .

algorithme E : chercher les q_i , les a_i et k tels que :

$q_i \in Z$, $a_i \in Z$,

$k \in N$

$|a_{i+1}| \le \frac{1}{2}\,|\,a_i\,|$

vérifiant les relations :

$$a = q_0\,p - a_1$$

$$p = q_1\,a_1 - a_2$$

$$\vdots$$

$$a_{k-2} = q_{k-1}\,a_{k-1} - a_k$$

$$a_{k-1} = q_k\,a_k$$

$$a_k = \pm 1$$

Donc pour que les trois fonctions citées plus haut (erreur sur la fréquence d'appartenance du couple à un intervalle, coefficient de corrélation, erreur commise sur la fréquence des permutations) soient faibles il est suffisant que les quotients obtenus par l'algorithme euclidien E, le soient.

Pour notre machine les mots ayant 32 bits il est commode de prendre les nombres modulo 2^{31}. La pseudo-période est $p = 2^{29}$.

Pour $a = 2^{16}-3 = 65533$ les quotients sont :
0, -8192, 3, 3, 911, 2 et -4 .

Pour $a = 137939445$ les quotients sont :
0, -4, -9, 4, 4, -5, 6, -3, -5, -6, 7, -4, 3 et 4.

Pour $a = 379675109$ les quotients sont :
1, 3, -2, 2, -2, 5, 3, -40904, 11 et 2 .

Donc le premier générateur est d'une qualité moyenne le deuxième est très bon et le troisième est très mauvais.

Le problème qui se pose et que Dieter n'a pas signalé, est que ce test est valable pour les couples de nombres successifs . Par contre pour les couples (x_i, x_{i+s}), ou pour le calcul de ρ_s il faut étudier les quotients successifs de a^s.

Pour pouvoir affirmer que les quantités testées sont petites il faudrait pouvoir calculer les quotients pour tous les $a^s \pmod m$, *et justement* a *est choisi de sorte que* a^s *prenne un nombre maximal de valeurs distinctes (i.e* $\frac{m}{4}$ valeurs distinctes*) Donc le choix d'un* a *vérifiant ces conditions est impossible.*

On a ici une démonstration de plus du fait que même si la corrélation entre x_i et x_{i+1} est faible, il ne faut pas en déduire que la corrélation entre x_i et x_{i+s} est faible.

Toutefois nous pourrons utiliser les générateurs pour lesquels le test de Dieter donne un bon résultat de préférence aux autres, car il est toujours agréable d'avoir une bonne répartition pour les couples successifs.

c) Théorie des treillis

Considérons les points U_p dont les coordonnées sont les k-uples successifs de nombres x_n :

$$U_p = (y_{kp}, y_{kp+1}, y_{kp+2} \cdots y_{kp+k-1})$$

Nous voulons étudier la répartition des U_p dans l'espace affine E^k associé à R^k.

Rappelons la définition d'un treillis engendré par les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2 \ldots \vec{V}_n$, c'est l'ensemble des points de coordonnées entières dans cette base : c'est l'ensemble des points M :

$$\vec{OM} = z_1 \vec{V}_1 + z_2 \vec{V}_2 + \ldots + z_n \vec{V}_n$$

$$\vec{OM} \in R^p$$

$$\forall i , \vec{V_i} \in R^p$$

$$z_i \in Z.$$

Les nombres y_n sont des entiers appartenant à $[0,m)$. Les nombres $x_n = \frac{y_n}{m}$ sont des fractions appartenant à $[0,1)$. Les nombres U_p appartiennent donc à un treillis dont la base dans R^k est formée par les "arêtes" du "cube" de longueur m, de volume m^k. Il faut tester l'uniformité de la répartition des points U_p parmi les points de ce treillis inclus dans le "cube" d'arête m. Marsaglia [89-1] a montré que les points U_p décrivent en réalité un sur-treillis dont la maille est plus grande (ce qui est évident) ; une base minimale a pour volume m^{k-1} et est formée des vecteurs : $(1,a,a^2, \ldots a^k)$, $(0,m,0 \ldots 0)$, $(0,0,m, \ldots 0) \ldots$ $(0,0, \ldots 0,m)$

Une autre façon de dire cela est de remarquer que les points U_p appartiennent à un certain nombre d'hyperplans de E^k (ceci découle immédiatement de la relation liant y_{n+k} et y_n.) [109]

En résumé, Marsaglia a montré que ces générateurs sont finalement à peu près tous aussi mauvais . Cependant il a émis l' idée que les meilleurs générateurs étaient ceux dont la base minimale était la plus "cubique" possible, et suggéré de mesurer le quotient entre l'arête la plus grande et l'arête la plus petite et de choisir les générateurs pour lesquels ce quotient est le plus petit possible (le plus proche de 1)

Cette argumentation ne me semble pas très convaincante. Il me semble que d' autres solutions sont à conseiller .

V . 4 Meilleures solutions

a) Première solution : utiliser des générateurs congruentiels d'ordre supérieur.

$$y_{i+n} = [a_1 y_{i+n-1} + a_2 y_{i+n-2} + \ldots . a_n y_i] \pmod m$$

Si m est premier, il faut et il suffit pour que la période soit maximale (elle est p^k-1) que le polynôme $f(x) = x^n - a_1 x^{n1} - a_2 x^{n-2} \ldots . - a_n$ soit un "polynôme primitif mod m". Ceci implique en particulier que $(-1)^{n+1} a_n$ soit une racine primitive modulo m.

Cette méthode permet d'assurer l'indépendance des couples, cependant jusqu'à présent elle ne semble pas très bien connue. Comment choisir les valeurs initiales ? Y a-t-il des blocs se déduisant par translation ? Ce sont des problèmes ouverts. D'autre part cette méthode présente des inconvénients du point de vue du temps de calcul et de la place mémoire, il me semble préférable d' utiliser une autre solution .

b) Deuxième solution : Nous connaissons bien les nombres générés par la méthode multiplicative congruentielle, leut défaut réside dans le fait que les k-uples appartiennent à des hyperplans. La solution la plus valable du point de vue des probabilités est de prendre ces nombres bien connus et de les mélanger pseudo-aléatoirement.

L'algorithme que je propose est le suivant

* *On génère des nombres* y_n *par une bonne méthode congruentielle multiplicative. (Par exemple on choisit* m *premier et* a *racine primitive de* m*)*

$$y_n = [a\, y_{n-1} + c] \pmod m$$

* *On remplit un tableau de longueur* ℓ *avec les* ℓ *premiers nombres* y_n.
* *On tire pseudo-aléatoirement un nombre* i_1 *entier compris entre* 1 *et* ℓ.
* $z_1 = y_{i_1}$
* *On remplace* y_{i_1} *par* $y_{\ell+1}$
* *On tire pseudo-aléatoirement un nombre* i_2 *entier compris entre* 1 *et* ℓ
* $z_2 = y_{i_2}$
* *On remplace* y_{i_2} *par* $y_{\ell+2}$
* *On recommence les trois dernières procédures.*

Le listing de ce sous programme est donné page 176.

c) Autres générateurs mathématiquement meilleurs : On sait depuis des années (le théorème de WEYL date de 1916)[122-2] fabriquer théoriquement des suites équiréparties asymptotiquement aussi bonnes qu' on le veut, et depuis quelques années on sait même fabriquer des suites complètement équiréparties (une suite x_n de nombres est complètement équirepartie modulo 1, si pour tout $k > 1$, la suite de points de l'espace affine associé à R^k ayant pour coordonnées

$$(x_n,\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+k-1}) \bmod 1$$

est équirépartie dans le "cube fondamentale" de R^k, "d'arête" 1).

[122-1],[123],[124]. On pourrait s' étonner de constater que ni les nombres pseudo-aléatoires implantés sur les ordinateurs , ni les nombres utilisés couramment par les personnes qui font des simulations n' utilisent ces méthodes . C' est qu' *il y a un monde entre la génération de suites théoriques asymptotiquement équiréparties et le calcul pratique grâce à un ordinateur à précision limitée d' une suite finie de longueur* N . Le problème n' est pas simple et les mathématiciens purs ne peuvent pas se montrer trop difficiles car même s' ils fabriquent de jolies suites , ils auront besoin de l' ordinateur pour les calculer numériquement . On peut fabriquer une suite sophistiquée mathématiquement excellente , mais il faut discuter les approximations que la précision limitée de la machine impose . En particulier il faut être sûr que les approximations ne font pas perdre à la méthode son intérêt .

Le théorème de FRANKLIN [125] indique qu'étant donné un nombre Θ supérieur à 1, la suite des nombres :

$$y_n = \Theta^n \ (mod\ 1)\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

est complètement équirépartie pour presque tout Θ, c'est-à-dire pour tous les Θ d'un intervalle (a,b) arbitraire, saufs certains constituant un ensemble de mesure de Lebesgue nulle sur (a,b). Malheureusement on n'a pas encore su nommer une seule de ces valeurs de Θ.

L'utilisation des nombres normaux qui a été étudiée par ALTABER [4] semble être une méthode excellente.

Une étude de BASS [122-5] et de BERTRANDIAS [122-6] montre qu'il semble préférable d'utiliser des polynômes de WEYL. Ce sont des polynômes :

$$\varphi(t) = A\, t^{\nu} + A_1 t^{\nu-1} + \ldots\ldots A_{\nu}$$

dont l'un des coefficients autres que A_{ν} est irrationnel. La suite :

$$|\varphi(n)| \ mod\ 1,\ n \in N$$

est équirépartie dans [0,1].

BASS et BERTRANDIAS indiquent qu'on peut se contenter d'utiliser le monôme :

$$\varphi(t) = A\, t$$

en choisissant un nombre A irrationnel ayant une mauvaise représentation rationnelle c'est-à-dire dont le développement en fraction continue admet des quotients les plus petits possibles. COUOT [123], [123-1] et [123-2] précise le choix de A, et indique en particulier

$$A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

ALTABER [4] a étudié l'implantation sur machine de telles suites.

Nous n'avons pas étudié personnellement ce domaine, notre point de vue étant d'étudier les nombres faciles à programmer et généralement utilisés par les personnes qui font des simulations, mais il est clair que ce domaine mérite une étude spéciale.

V.5 Choix de plusieurs suites de nombres pseudo-aléatoires

Pour des simulations même très simples on a en général besoin de plusieurs suites de nombres pseudo-aléatoires. Il est clair que l'erreur grave à éviter est de prendre pour les différentes suites la même base et des valeurs initiales différentes, car on choisit alors deux suites identiques se déduisant l'une de l'autre par une translation d'indice et on court le danger d'avoir une translation très faible.

Il y a deux solutions, ou bien il faut choisir des bases différentes pour chacune des suites, ou bien et c'est ce que nous avons fait, il faut extraire d'une seule suite les différentes suites dont nous avons besoin.

Par exemple pour une simulation comportant des tirages aléatoires pour les temps séparant deux arrivées et des tirages pour les durées de service, on peut n'utiliser qu'une seule suite de nombres pseudo-aléatoires. Si on a besoin d'un temps séparant deux arrivées, on utilise le premier nombre pseudo-aléatoire ; si on a ensuite besoin d'un autre temps séparant deux arrivées, on utilise le deuxième nombre pseudo-aléatoire ; si on a ensuite besoin d'une durée de service, on utilise le troisième ...

C'est ce que nous avons fait ; c'est le plus simple, mais surtout cela présente l'avantage de faire une sorte de mixage analogue à la "deuxième solution" proposée ci-dessus. Nous présentons au paragraphe suivant les résultats, pour différentes suites de nombres pseudo-aléatoires. Les résultats montrent clairement que la forme obtenue pour la courbe ne dépend pas des nombres pseudo-aléatoires. Si on compare la courbe pour le "plus mauvais" générateur et la courbe pour le "meilleur", il n'y a pas de différence fondamentale. Nous pouvons en conclure que des nombres pseudo-aléatoires qui sont mathématiquement assez mauvais , perturbent peut-être beaucoup les résultats de la simulation , mais ils perturbent beaucoup moins que les erreurs de troncature . C' est pour cela qu' aux chapitres précédents nous avons négligé l' influence des nombres pseudo-aléatoires .

V.6 Résultats pour la simulation M/M/1

Nous présentons les résultats pour différents générateurs *par ordre croissant de qualité.*

* Fig 19 : méthode de Fibonacci (voir V.1.e)
  listing page 174
* Fig 20 à 27 : méthode multiplicative mod 2^{31} (voir II.5.b)
  Ces nombres sont classés en commençant par le plus mauvais, si on considère le test de Dieter.

Fig 20 : $a = 507711789$ → $D(a, 2^{29}) = 28531.9$
Fig 21 : $a = 2429$ → $D(a, 2^{29}) = 18423.3$
Fig 22 : $a = 379675109$ très mauvais (déjà vu)
} très mauvais

Fig 23 : $a = 2^{16}-3$
Fig 24 : $a = 2^{16}+3$
} nombres de qualité moyenne

Fig 25 : $a = 48048301$ → $D(a, 2^{29}) = 9.1$
Fig 26 : $a = 68945125$ → $D(a, 2^{29}) = 9.0$
Fig 27 : $a = 137939445$ très bon (déjà vu)
} très bons

* Fig 28 : méthode multiplicative mod $(2^{31}-1)$
  (voir V.4.a) $a = 7^5$

* Fig 29 : méthode proposée au V.4.b

$$y_n = 137939445\ y_{n-1} \pmod{2^{31}}$$

On utilise un tableau de 10 valeurs de y_n. On tire aléatoirement un nombre entre 1 et 10 en utilisant le générateur :

$$z_n = 65539\ z_{n-1} \pmod{2^{31}}$$

listing page 176

Listing des sous-programmes utilisés

```
0001                    SUBROUTINE FIBO(E,IX,IY)
0002                    IX=IX+IY
0003                    IF(IX)1,2,2
0004                1   IX=IX+2147483647+1
0005                2   E=FLOAT(IX)/2147483647.
0006                    E=-ALOG(E)
0007                    II=IY
0008                    IY=IX
0009                    IX=II
0010                    RETURN
0011                    END
```

```
0001                    SUBROUTINE MIXA(X,IFIB,IX,IR,Y)
0002                    INTEGER Y(10)
0003                    IA=137939445
0004                    IB=65539
0005                    IF(IFIB-1)1,2,1
0006                2   DO 12 I=1,10
0007                    IX=IX*IA
0008                    IF(IX) 11,12,12
0009                11  IX=IX+2147483647+1
0010                12  Y(I)=IX
0011                1   IR=IR*IB
0012                    IF(IR) 21,20,20
0013                21  IR=IR+2147483647+1
0014                20  E=FLOAT(IR)/2147483647.
0015                    E=1.+E*10
0016                    II=E
0017                    IZ=Y(II)
0018                    IX=IX*IA
0019                    IF(IX) 31,30,30
0020                31  IX=IX+2147483647+1
0021                30  Y(II)=IX
0022                    X=FLOAT(IZ)/2147483647.
0023                    X=-ALOG(X)
0024                    RETURN
0025                    END
```

IFIB est initialisé à 1, puis après avoir appelé le sous programme MIXA pour la première fois, on donne à IFIB la valeur 2.

Références sur les nombres aléatoires .

J. L. ALTABER . *Représentation arithmétique des grandeurs aléatoires.* Référence [4] , p. 68-86 .

[89] Edité par S.K. ZAREMBA d'après le congrès de Montréal 1971. *Applications de la théorie des nombres à l'analyse numérique.* Academic Press (1972)

[89-1] dans ce livre article de : G. MARSAGLIA. *The structure of linear congruential sequences.* p 249 - 286.

[89-2] dans ce livre article de : U. DIETER. *Statistical interdependence of pseudo-random numbers generated by the linear congruential method.* p 287 - 317.

[90] B. PICINBONO et BENDJABALLAH : *Photoelectron shot noise.* Journal of Mathematical Physics. Vol 11 n°7 (july 1970)

[91] HULL and DOUBELL : *Random number generators.* SIAM review 4,3 (1962)

[92] GREEN, SMITH and KLEM : *Empirical test of an additive random number generator.* J.A.C.M. vol 6 (1959) p 527.

[93] J.C.P. MILLER and M.J. PRENTICE : *Additive congruential pseudo random number generators.* Comp. J. Vol 11, n°3 (nov 68) p 341 - 347.

[94] D.H. LEHMER : *Mathematical methods in large scale computing units.* Annals of the computation laboratory of Harvard University n° 26. Proceedings of a Second Symposium on large scale digital calculating machinery (1951) p 141.

[95] J. TODD and O. TAUSSKY TODD : *Generators of pseudo random numbers.* Symposium on Monte Carlo Methods (H.A. Meyer Ed.) Wiley (1956) p 15-28.

[96] M.L. JUNCOSA : *Random number generation on the BRL high speed computing machines.* Report n°855. Ballistics research laboratories Aberdeen proving ground, Maryland 1953.

[97] D.L. JOHNSON : *Generating and testing pseudo random numbers on the IBM type 701.* Math Tables Aids Comp. 10 (1956) p 813.

[98] J. MOSHMAN : *The generation of pseudo random numbers on a decimal calculator.* J.A.C.M. vol 1 (1954) p 88-91.

[99] E. BOFINGER and V.I. BOFINGER : *A periodic property of pseudo-random sequences.* J.A.C.M. vol 5 (1958) p 261-265.

[100] J.E. CERTAINE : *On sequences of pseudo-random numbers of maximal length.* J.A.C.M. vol 5 (1958) p 353.

[101] A. ROTENBERG : *A new pseudo-random number generator.* J.A.C.M. vol 7 (1960) p 75-77.

[102] M. GREENBERGER : *Random number generators.* Preprints of the 14th National conference of the A.C.M. (sept 1969).

[103] R.R. COVEYOU : *Serial correlation in the generation of pseudo-random numbers.* J.A.C.M. vol 7 (1960) p 72-74.

[104] R.R. COVEYOU and R.D. MACPHERSON : *Fourier analysis of uniform random numbers.* J.A.C.M. vol 14 n°1 (Janv 1967) p 100-120.

[105] M. GREENBERGER : *Notes on a new pseudo-random number generator.* J.A.C.M. vol 8 (1961) p 163.

[106] A.S. HOUSE HOLDER (Ed) *Monte-Carlo methods. National Bureau of Standards.* App. Math Ser. n°12 (june 1951) p 33-37.

[107] H. RADEMACHER and A. WHITEMAN : *Theorem on Dedekind sums.* Amer. J. Amer. J. Math. vol 63 (1941) p 377-407.

[108] M. GREENBERGER : *An a priori determination of serial correlation in computer generated random numbers.* Math. Comp. vol 15 (1961) p 383-389.

[109] G. MARSAGLIA : *Random numbers fall mainly in the planes.* Proc. Nat. Acad. Science 61 (1968) p 25-28.

[110] G. MARSAGLIA : *Regularities in congruential random number generators.* Numer. Math. vol 16 (1970) P 8-10.

[111] U. DIETER : *Pseudo-random numbers : the exact distribution of pairs.* Math. Comp. vol 25 (1971) p 855-884.

[112] U. DIETER and J. AHRENS : *An exact determination of serial correlation of pseudo-random numbers.* Numer. Math. 16 (1971) p 101-123.

[113] G. MARSAGLIA and T.A. BRAY : *One line random number generators and their use in combinations.* C.A.C.M. vol. 7 n°11 (1968) p 757-759.

[114] M.D. MACLAREN and G. MARSAGLIA : *Uniform random numbers generators.* J.A.C.M. vol 12 n°1 (janv 65) p 83-90.

[115] A. VAN GELDER : *Some new results in pseudo-random number generation.* J.A.C.M. vol 14 n°4 (oct 67) p 785-792.

[116] S. GORENSTEIN : *Testing a random number generator.* C.A.C.M. vol 10 n°2 (1967) p 111-118.

[117] D.Y. DOWNHAM and F.D.K. ROBERTS : *Multiplicative congruential pseudo-random number generators.* Comp. J. vol 10 n°1 (may 1967) p 74-78.

[118] W.H. PAYNE J. RABUNG and T.P. BOGYD : *Coding the Lehmer pseudo-random number generator.* C.A.C.M. Vol 12 n°2 (feb 1969) p 85-86.

[119] D.W. HUTCHINSON :*A new uniform pseudo-random number generator.* C.A.C.M Vol 9 n°6 (june 1966) p 432-433.

[120] R.C. TAUSWORTHE : *Random numbers generated by linear recurrence modulo two.* Math. Comp. Vol 19 n°90 (1965) p 201-209.

[121] J.R.B. WHITTLESEY : *A comparison of the correlational behaviour of random number generator for the I.B.M. 360.* C.A.C.M. Vol 11 n° 9 (1968) p 641-644.

[122-1] J. BASS : *Suites uniformement denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires.* Bull. Soc. math. France, 87, (1959) p 1-64.

[122-2] J. BASS : *La Simulation du hasard et les méthodes mathématiques de la turbulence.* Colloque sur la propagation aléatoire et la turbulence. (18-22 Sept. 1972) Nice. Extrait de la revue du Cethedec. 10ème année 1er trimestre - N° 34.

[122-3] J. BASS : *Stationary functions and their applications to the theory of Turbulence. I Stationary functions.* Journal of Mathematical analysis and applications . Vol. 47 , No. 2 ,- (August 1974) p 354 -399.

[122-4] J. BASS : *Stationnary functions and their applications to turbulence. II Turbulence solutions of the Navier-Stokes equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 47 n° 3 Sept 1974, p 458-503.

[122-5] J. BASS : *Nombres aléatoires, suites arithmétiques, methode de Monte Carlo.* Publication de l'I.S.U.P. n° 3, 1960 p 289-325.

[122-6] J.P. BERTRANDIAS : *Calcul d'une integrale au moyen de la suite* $X_n = An$ *Evaluation de l'erreur.* Publication de l'I.S.U.P. n° 4, 1960 p 335-349.

[123] G. RAUZY : *Fonctions entières et répartition modulo un, II.* Bull. Soc. Math. France. 101, (1973) p 185-192.

[124-1] J. COUOT : *Mesures asymptotiques, moyennes et théorie ergodique de l'équirépartition.* Thèse, Université Paris VI, 22 Avril 1974.

[124-2] J. COUOT : *Aookucatuib des syutes* $m\,\Theta$ *à l'intégration numérique.* C. R. Acad. Sc. Paris t-264, A, p 183-186 - (1967).

[124-3] J. COUOT : *Application des suites* $m\,\Theta$ *à l'intégration multiple sur le tore.* C.R. Acad. Sc. Paris t 266, A, p 131-134. (1968).

[125] J.N. FRANKLIN : *Deterministic simulation of random processes.* Math. Comp. 17 (1963).

Ouvrages généraux :

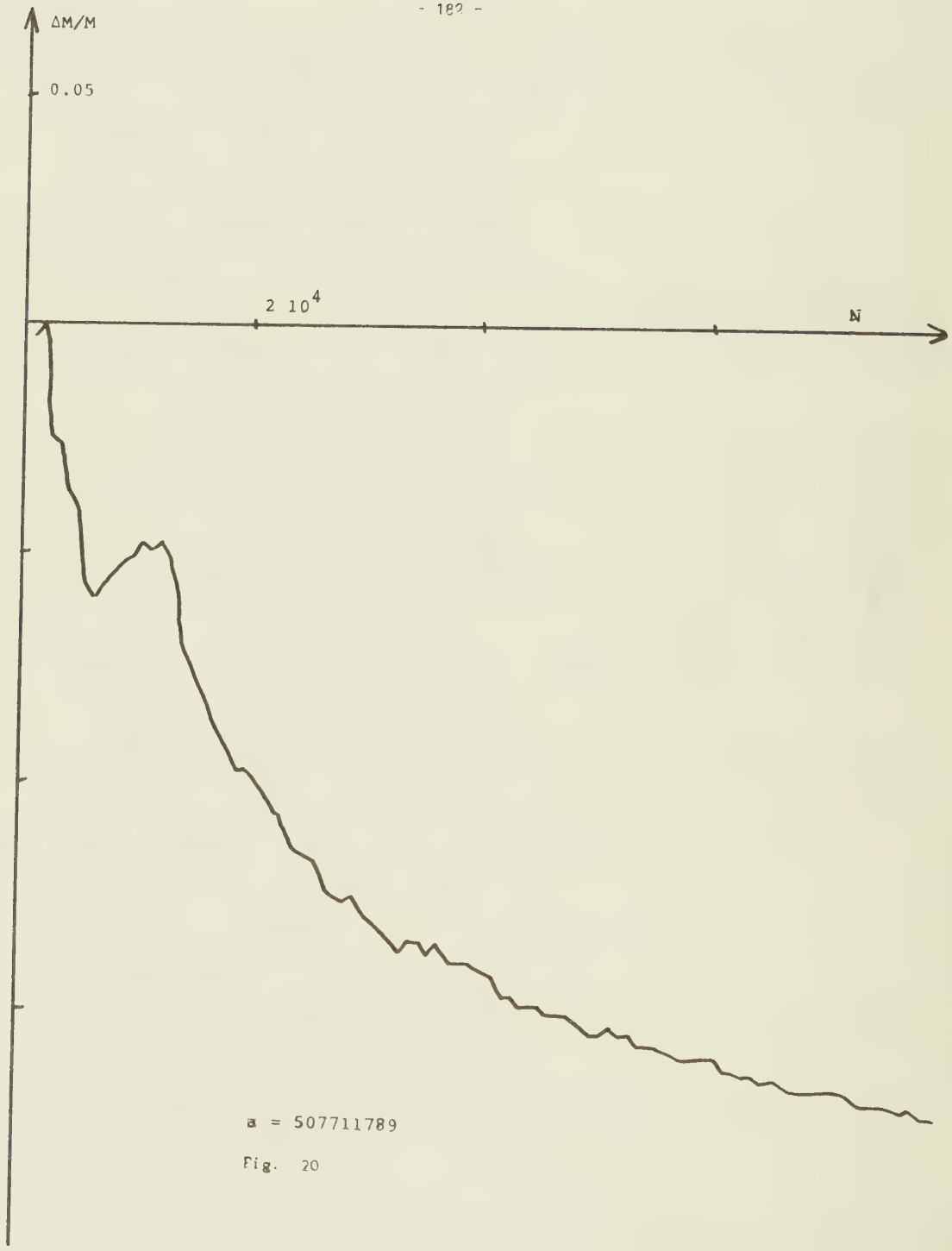
[125-1] K.D. TOCHER : *The Art of simulation.* English Univ. Press, London London 1963.

[125-2] G.S. FISHMAN : *Concepts and methods in discrete event digital simulation.* Wiley, (1973).

[125-3] Donald E. KNUTH : *The art of computer programming.* Addison-Wesley Publishing C_0 , (1969) , Volume 2.

[125-4] Birger JANSSON : *Random Number generators.* Victor Pettersons Bokindustri Aktiebolag, Stockholm 1966.

Fig. 19 FIBO



a = 507711789

Fig. 20

a = 2429

Fig. 21

Fig. 22
a = 379675109

a = 65533

Fig. 23

Fig. 24 a = 65539

Fig. 25

a = 48048301

Fig. 26

a = 68945125

Fig. 27

a = 137939445

Fig. 28

$a = 7^5$ modulo $(2^{31}-1)$

Fig. 29

137939445 mixage avec 65539

Rappel 1

Comment se ramener à la génération d'une variable uniforme ?

a) Génération de nombres obeissant à une loi normale

On sait que la loi de la somme de p variables indépendantes de même loi μ et de variance σ^2 est proche de la loi normale de moyenne $p\,\mu$ et de variance $p\,\sigma^2$.

Pour construire une suite de moyenne m et de variance s^2 et dont la loi soit proche de la loi normale il suffit donc de construire p variables aléatoires indépendantes, de même loi, $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ de moyenne μ et de variance σ^2 et de définir Y :

$$Y = (Y_1 + Y_2 + \ldots . Y_p - p\mu) \frac{s}{\sigma} + m$$

Les valeurs prises par Y seront assez bonnes si p est assez grand. La seule difficulté est donc de générer une suite de réalisations des variables aléatoires $Y_1 \ldots Y_p$, nous pouvons décider de les choisir uniformes.

b) Génération de nombres obeissant à la loi du χ^2 à d-1 degrés de liberté

On sait que c'est la loi de la somme de d variables normales centrées normalisées et indépendantes. On est donc ramené au problème précédent.

Il en est de même pour la loi de Student, et pour beaucoup d'autres lois.

c) Méthode de la fonction inverse de la fonction de répartition $F_X(x)$

Remarque : On désigne par des lettres majuscules les variables aléatoires et par des lettres minuscules les valeurs prises par des variables aléatoires.

Rappel $\qquad F_X(x) = \text{Proba}\,(X < x)$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

Théorème : Etant donnée une fonction de répartition $F(x)$ *strictement croissante (donc inversible). Soit* Φ *la fonction inverse de* F.

Soit U *une variable aléatoire de répartition uniforme sur* $[0,1]$. *La variable* X *définie par* $X = \Phi(U)$ *a pour fonction de répartition* $F(x)$.

Démonstration : Soit $F(x)$ donnée et Φ son inverse :

$[x = \Phi(u)] \Leftrightarrow [u = F(X)]$

Nous voulons démontrer que :

Proba $[X < x] = F(X)$

Calculons *Proba* $[X \leq x]$

F étant monotone :

Proba $[X < x]$ = *Proba* $[F(X) < F(x)]$

$X = \Phi(U) \Leftrightarrow U = F(X)$

donc Proba $[X < x]$ = *Proba* $[U < F(x)]$

et U étant uniforme on a pour $u \in [0,1]$

Proba $[U < u] = u$

Et comme $F(x) \in [0,1]$

Proba $[U < F(x)] = F(x)$

Conclusion : Pour générer des nombres aléatoires de fonction de répartition croissante strictement, il suffit de générer des nombres aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$ et d'utiliser la fonction inverse de la fonction de répartition comme l'indique le théorème précédent .

Remarque : Le même théorème peut s' appliquer pour une fonction $F(x)$ *croissante et non strictement croissante ; on définit une fonction qui est l' inverse de* F *partout sauf sur un ensemble de mesure nulle .*

Premier exemple: si on veut générer des nombres aléatoires de distribution exponentielle :

On veut que $P_X(x) = \frac{1}{\beta} \quad e^{-\frac{x}{\beta}}$, si $x > 0$

$P_X(x) = 0$, si $x < 0$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Il faut : $U = 1 - e^{-\frac{X}{\beta}}$

$$X = -\beta \text{ Log } (1-U)$$

Si U est uniforme, $(1-U)$ est uniforme.

Donc finalement on peut construire une variable V uniforme sur $[0,1]$ et poser

$$X = -\beta \text{ Log } V.$$

d) Méthode de réjection

S'il existe une densité de probabilité bornée et à support borné :
hypothèses : $p(x) = 0, \forall x : x \leq a$ ou $x \geq b$

$$p(x) \leq c, \forall x \in [a,b]$$

Méthode : générons deux variables aléatoires U *et* V *équiréparties sur* $[0,1]$

Définissons $Y = a + U\,(b-a)$

$$Z = c\,V$$

$$X = Y \;/\; (Z - p(Y) < 0)$$

C'est-à-dire que nous utiliserons l'algorithme suivant :

- générons une valeur u et une valeur v de U et V
- calculons les valeurs y et z de Y et Z
- si $z - p(y) \geq 0$ on rejette la paire (u,v) et on recommence.
- $z - p(y) < 0$ on prend $X = y$.

Démontrons que cet algorithme est correct :

Pour cela étant donnée une valeur α n'appartenant pas à $[a,b]$ définissons la variable W :

$$W = Y \text{ si } Z < p(Y)$$
$$W = \alpha \text{ si } Z \geq p(Y)$$

W prend ainsi ses valeurs sur $(\alpha, [a,b])$

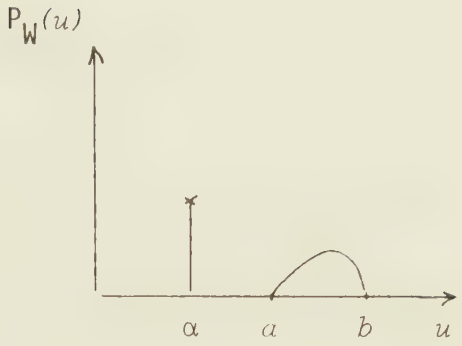


Fig 17

Calculons la loi de W.

$$\text{Prob}[W=\alpha] = \text{Prob}[Z \geq p(Y)] = \int_a^b \text{Prob}[Z \geq p(Y),\ y \leq Y < y+dy]$$

$$= \int_a^b \text{Prob}\left[\frac{Z}{c} \geq \frac{p(y)}{c}\right] \text{Prob}[y \leq Y < y+dy]$$

Mais $\frac{Z}{c}$ est la variable V qui est uniformément répartie donc :

$$\text{Prob}\left[\frac{Z}{c} < \frac{p(y)}{c}\right] = \frac{p(y)}{c}$$

$$\text{Prob}[W=\alpha] = \int_a^b \left[1 - \frac{p(y)}{c}\right] \frac{dy}{(b-a)} = 1 - \frac{1}{c(b-a)}$$

De même $\text{Prob}[y \leq W < y+dy] = \text{Prob}[Z < p(Y),\ y \leq Y < y+dy]$

donc W a une densité de probabilité $p_W(y)$ qui est :

$$p_W(y)\,dy = \text{Prob}[Z < p(Y)/y \leq Y < y+dy] \text{Prob}[y \leq Y < y+dy]$$

$$= \text{Prob}[Z < p(y)] \text{Prob}[y \leq Y < y+dy]$$

$$= \text{Prob}\left[\frac{Z}{c} < \frac{p(y)}{c}\right] \text{Prob}[y \leq Y < y+dy]$$

$$= \left[\frac{p(y)}{c}\right] \frac{dy}{b-a}$$

$$p_W(y)\,dy = \frac{1}{c(b-a)}\, p(y)\,dy$$

La densité de X se déduit de $X = W/(W \neq \alpha)$

$$\text{Prob}[x \leq X < x+dx] = \frac{\text{Prob}[x \leq W < x+dx]}{\text{Prob}[W \neq \alpha]} = \frac{\frac{1}{c(b-a)}\,p(x)}{\frac{1}{c(b-a)}}$$

$$\text{Prob}[x \leq X < x+dx] = p(x)$$

Rappel 2 - tests classiques

a) Test du χ^2

Séparons l'intervalle de variation des x_n, (que nous supposons borné) en k intervalles de même longueur $I_1 \ldots I_k$. Si la répartition était uniforme on aurait :

$$\forall i, \ \forall n : P(x_n \in I_i) = p_i = \frac{1}{k}$$

Nous allons tester parmi les N premiers nombres x_n, la fréquence d'appartenance à l'un de ces k intervalles. Soit $S_N(i)$ le nombre des x_n qui appartiennent à I_i.

$$S_N(i) = \# \{x_n : x_n \in I_i, \ n \leq N\}$$

Si les nombres x_n sont bons on doit avoir :

$$\frac{S_N(i)}{N} \rightarrow p_i$$

et Var $\left[\frac{S_N(i)}{N}\right] \rightarrow p_i(1-p_i)$ $\quad N \rightarrow \infty$

Si on fait l'hypothèse de l'indépendance et l'hypothèse que les y_n ont tous la même loi, le théorème central limite nous assure que :

$$\frac{S_N(i)}{N} - p \rightarrow \text{variable normale centrée.}$$

Il en résulte qu'on peut démontrer que la variable :

$$F_N = \sum_{i=1}^{k} \frac{(S_N(i) - Np_i)^2}{Np_i}$$

suit la loi du χ^2 avec k-1 degrés de liberté. Le test consiste à comparer les résultats de F_N avec ceux de la variable du χ^2.

Test des séries : c'est un test analogue au précédent mais on teste la fréquence d'apparition des k-uples pour les numéros de classes de k éléments consécutifs.

Par exemple pour les couples (x_{2p}, x_{2p+1}). Considérons la suite s_p des couples :

$$s_p = (i,j) \text{ si } x_{2p} \in I_i$$

$$x_{2p+1} \in I_j$$

On teste la fréquence d'apparition du couple (i,j) ce qui revient à considérer dans E^2 espace affine associé à R^2 le point U_p de coordonnées $x_{2p}\ x_{2p+1}$ et à tester la fréquence d'appartenance de U_p aux pavés $I_i \times I_j$.

b) Test de Kolmogorov - Smirnov

Le test du χ^2 est applicable pour des variables aléatoires prenant un nombre fini et petit de valeurs, ou pour une division de l'intervalle de variation en un nombre fini et petit de classes, mais il ne donne pas d'information sur ce qu'il se passe à l'intérieur d'une classe.

Le test de Kolmogorov Smirnov consiste à comparer la fonction de répartition cumulée de l'échantillon des N premiers nombres x_n, avec la fonction de répartition souhaitée :

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\ [S_N(x)]$$

$$S_N(x) = \#\ \{i\ ;\ x_i \leq x, \text{ et } i \leq N\}$$

La figure 18 est faite pour le cas où les x_n sont répartis dans un intervalle $[a,b]$.

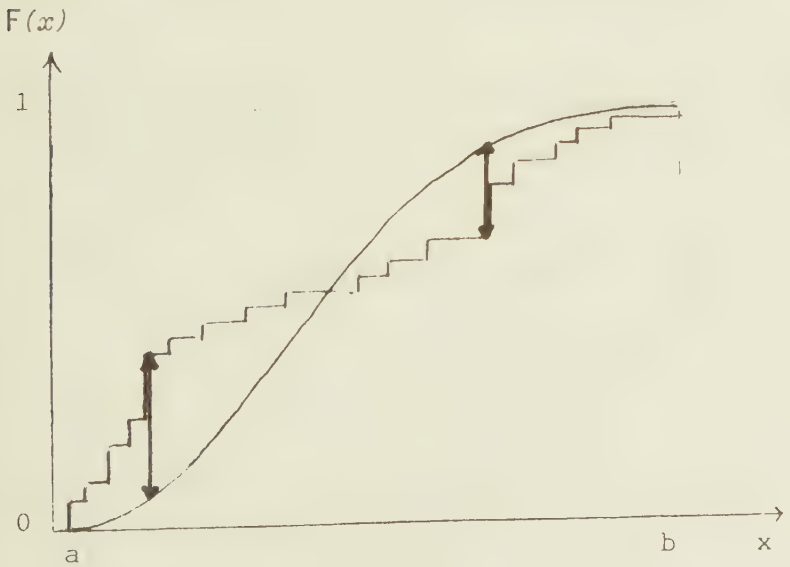


fig. 18
Test de K.S.

Le test consiste à mesurer la distance entre les 2 lois : on mesure $\sup_{x \in R} |F_N(x) - F(x)|$.

par exemple en étudiant :

$$K_N^+ = \sqrt{N} \sup_{x \in R} [F_N(x) - F(x)]$$

$$K_N^- = \sqrt{N} \sup_{x \in R} [F(x) - F_N(x)]$$

La difficulté essentielle provient du fait qu'il faut classer les valeurs x_n par ordre croissant ce qui est relativement long si les x_n sont nombreux.

c) Autres tests classiques fondés sur la division de l'intervalle de définition en k intervalles et supposant l'uniformité, vérifiant l'indépendance en étudiant les fréquences d'appartenance aux différents intervalles.

test du poker : on considère les numéros des intervalles des 5 premiers nombres, des 5 suivants .... on teste la fréquence des configurations obtenues de façon analogue aux configurations possibles du poker :

ordinaire :	a b c d e	(les 5 numéros des intervalles sont distincts)
une paire :	a a b c d	
deux paires :	a a b b c	
un brelan :	a a a b c	
un full :	a a a b b	
un carré :	a a a a b	
er enfin :	a a a a a	(qui n'existe pas au poker)

exemple : si $x_{5p} \in I_3$, $x_{5p+1} \in I_6$, $x_{5p+2} \in I_1$, $x_{5p+3} \in I_6$, $x_{5p+4} \in I_{10}$ on comptabilise une paire.

Test des suites on mesure la longueur des suites des numéros des intervalles obtenus.

exemple : $x_1 \in I_3$, $x_2 \in I_6$, $x_3 \in I_7$, $x_4 \in I_1$, $x_5 \in I_{10}$, $x_6 \in I_4$, $x_7 \in I_5$, $x_8 \in I_6$, $x_9 \in I_2$.

On a une suite de longueur 2 c'est (x_2, x_3) et une suite de longueur 3 (x_6, x_7, x_8)

Tests des "runs up and down" [117] à la suite des numéros des intervalles obtenus on associe une suite binaire dont le $n^{ième}$ terme est s_n :

$$s_n = 0 \quad \text{si} \quad x_n \leq a_{n-1}$$

$$s_n = 1 \quad \text{si} \quad x_n > a_{n-1}$$

on mesure la longueur des sous suites de 0 ou de 1 successifs.

Le test consiste à déterminer la fréquence d'apparition des longueurs 1,2,3,4,5 .....

Tests des "runs above and below" à la suite des numéros des intervalles obtenus on associe une suite binaire :

$$s_n = 0 \quad \text{si} \quad x_n \leq 0,5$$

$$s_n = 1 \quad \text{si} \quad x_n > 0,5$$

Le test consiste à déterminer la fréquence d'apparition des longueurs des sous-suites de 0 ou de 1 successifs.

CONCLUSION DES 5 PREMIERS CHAPITRES

Nous avons démontré l'importance des erreurs de troncatures. Nous avons en particulier démontré que l'idée couramment admise selon laquelle "lorsque la durée de simulation augmente, la précision augmente", est fausse. Pour de longues durées, la précision diminue, à cause des erreurs de troncature. Nous avons démontré dans le cas général d'une moyenne arithmétique et de différents algorithmes l'existence d'une durée optimale.

Si la machine travaillait en arrondi et non en troncature, le biais serait plus faible, mais le principe resterait le même. En effet, même en arrondi lorsque la machine doit ajouter un nombre très petit, en valeur absolue, à un nombre très grand, en valeur absolue, elle ajoute zéro. Toutefois nous avons l'intention de faire dans l'avenir des calculs analogues à ceux qui sont faits ici, mais pour machine travaillant en arrondi.

Nous avons aussi comparé avec précision différents algorithmes de calculs de moyenne arithmétique,la généralisation aux moyennes temporelles étant possible. Nous avons démontré une équivalence entre les algorithmes (17) et (18) lorsqu'ils sont utilisés dans des conditions optimales. Il serait intéressant de discuter d'autres algorithmes de la forme générale (16). Cet algorithme nous laisse une grande liberté de choix pour les coefficients μ_n. En effet l'espérance de l'estimateur M_n est toujours a (ceci se démontre par récurrence). Il suffit donc de choisir les coefficients μ_n pour que la variance tende vers 0, ou tout au moins soit suffisamment petite, et pour que le biais ne soit pas trop grand. Par exemple on pourrait étudier le cas :

$$\mu_{N+p} = \frac{1}{N + p^{\alpha}}$$

avec $\alpha < 1$

Enfin il serait intéressant de chercher à évaluer avec précision le biais dans le cas où la répartition serait différente. Nous pensons que le résultat ne serait pas sensiblement différent. Ces calculs nécessiteraient le calcul préalable permettant de répondre à la question : "quelle est la répartition des chiffres de la mantisse d'une variable aléatoire de la loi donnée".

CHAPITRE VI

Etude d'un réseau de téléinformatique.

VI.1 Description du modèle

VI.2 Définition des variables et première mise en équation

VI.3 Définition et propriétés des projecteurs

VI.4 Pour une jonction sortante étude de la chaîne de Markov incluse

VI.5 Pour une jonction sortante étude de la chaîne de Markov $(Z(t), D(t))$

VI.6 Résolution du système complet

VI.7 Résultats de la simulation

VI.8 Analyse des résultats

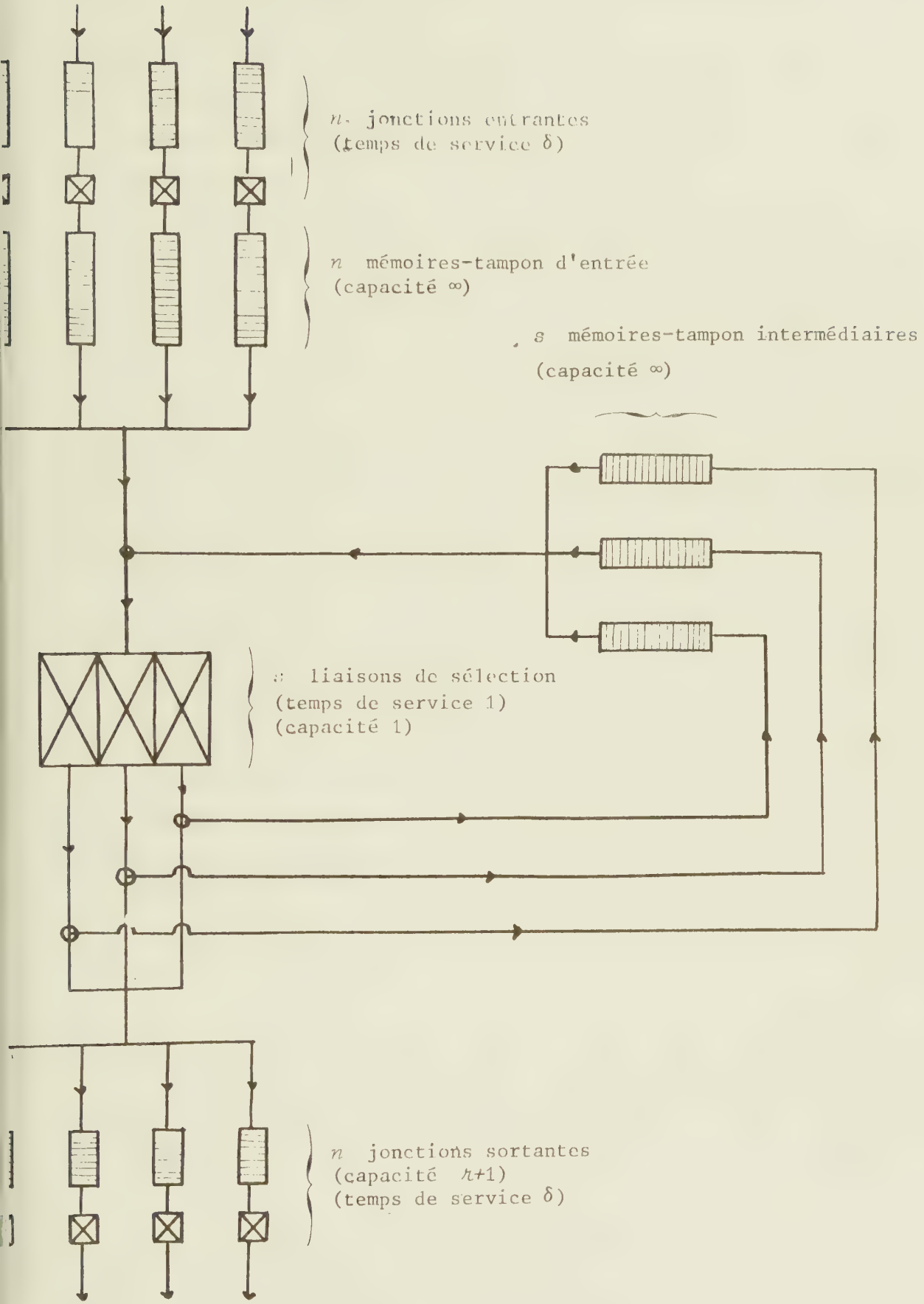


Schéma du système

VI.1 Description du modèle

Il s'agit d'un réseau de transmission de messages codés. Nous étudions *un noeud de réseau* formé de jonctions entrantes, et de liaisons de sélection dirigeant chaque message vers la jonction sortante qui convient.

Les messages sont des suites de 0 et de 1 groupés par paquets de 16 caractères de 8 bits. Un message est donc formé d'un certain nombre de *paquets*, le dernier n'étant éventuellement pas complet. Les messages étant longs nous négligerons ce fait. Les paquets étant donc considérés comme de longueur constante, les temps d'utilisation des jonctions et des liaisons seront constants. On aura donc un système de files d'attente à service constant. *Les serveurs sont les jonctions et les liaisons. Les clients sont les paquets.* Les jonctions et liaisons ont une capacité finie. On a donc un réseau de files d'attente à temps de service constants et à capacités finies.

Les études classiques sur les files d'attente faites par JACKSON [126], ne peuvent pas s'utiliser dans le cas de service constant. Le cas où l'approximation par diffusion ([132] à [138]) s'applique le moins bien est celui des services constants et des capacités finies. Les études actuellement publiées donnent des résultats sur les tandems, c'est-à-dire les séries de file d'attente. Un tandem est isolé du réseau et étudié indépendamment du reste, [130], [131], [139], [144]. L'étude générale d'une file d'attente à service constant et à capacité limitée est loin d'être résolue. Mais on est encore bien plus loin de l'étude générale complète d'un réseau avec des files d'attente à service constant et à capacité limitée. Nous présentons ici une étude théorique partielle, mais *la nécessité d'une simulation est évidente.*

Décrivons plus précisément le modèle : il y a n jonctions entrantes, et n jonctions sortantes, chaque paquet étant destiné à l'une d'entre elles précisément. Tous les paquets d'un même message proviennent de la même direction,donc ils sont destinés a la même jonction entrante i , et ont la même destination, donc sont destinés à la même jonction sortante j.

Les jonctions peuvent être considérées comme des serveurs, avec un temps de service constant δ , et un choix de priorité FCFS. Les paquets sortant des jonctions entrantes attendent dans des mémoires tampon d'entrée couplées avec chaque jonction entrante de pouvoir être traités par des liaisons de sélection. Les jonctions sortantes ont une capacité $n + 1$.

Il y a s *liaisons de sélections*, de capacité 1, et de temps de service choisi comme unité. Chaque liaison de sélection envoie le paquet qu'elle traite vers la jonction sortante à laquelle il est destiné. Cependant si la mémoire tampon de sortie de celle-ci est pleine, elle envoie le paquet vers une mémoire tampon intermédiaire. Chacune des s liaisons de sélection est couplée avec une mémoire-tampon. Les liaisons de sélection choisissent au hasard un paquet parmi ceux qui sont disponibles parmi les $n + s$ mémoires-tampon d'entrée ou intermédiaires. Pour être disponible un paquet doit être le premier de la file. L'affectation des paquets aux liaisons est aléatoire. S'il y a moins de paquets disponibles que de liaisons, les liaisons occupées seront choisies au hasard (il y a donc symétrie entre les liaisons, ce qui a pour conséquence une symétrie entre les mémoires tampon intermédiaires.

Notre but est de dimensionner les jonctions entrantes et les mémoires-tampons intermédiaires, pour cela nous les supposons de capacité infinie et nous cherchons à évaluer les probabilités des différentes longueurs de file pour chacune de ces mémoires et jonctions.

Nous voulons que ce noeud fonctionne avec une certaine sécurité. Nous voulons par exemple qu'il puisse fonctionner même si quelques liaisons sont en panne. Donc nous considérerons un système fonctionnant avec une charge faible.

Remarque : Il s'agit d'un projet donc nous faisons l'étude théorique. Nous faisons confiance aux ingénieurs qui proposent ce modèle pour la réalisation pratique.

Hypothèse de discrétisation

On suppose que δ est entier, ce qui n'est pas trop grave car δ est sensiblement plus grand que le temps de service d'une liaison de sélection.

On suppose qu'il est possible de tout discrétiser : les temps de production des paquets, les débuts et fins de service de chaque jonction et de chaque liaison se produisent à des époques entières.

Cette hypothèse facilite le calcul théorique et la simulation ; elle permet d'une part de faire une simulation instant par instant, (et non pas une simulation événement par événement), ce qui est très rarement possible et beaucoup plus facile à programmer ; elle permet d'autre part d'éviter les erreurs de troncature, ce qui est aussi extrêmement rare, et nous avons vu au chapitre II l'importance des erreurs de troncature.

Cette hypothèse est rendue possible par le fait que les durées de service sont constantes. Un calcul a été fait par Monsieur Fortet pour la justifier, et non publié pour l'instant.

Hypothèses pour la production des paquets.

On fait l'hypothèse que les sources sont suffisamment nombreuses pour que les instants de début de message forment un processus de Poisson. On fait l'hypothèse que chaque source émet des paquets séparés par un intervalle constant Δ, grand devant δ et entier pour l'unité de temps choisie précédemment. Chaque source émet pendant une durée qui obéit à une loi exponentielle, et qui est la même pour toutes les sources. La longueur du message, c'est-à-dire le nombre de paquets, obéit donc à une loi exponentielle de paramètre μ.

Remarquons que cette hypothèse est valable pour le premier noeud du réseau de transmission, ensuite l'ordre des paquets sera un peu modifié et l'intervalle de temps séparant deux paquets d'un message ne sera plus constant. Ce fait est assez important. En effet, aussi longtemps qu'on considère des paquets appartenant à des messages différents, ils peuvent être considérés comme indépendants les uns des autres et forment un processus de Poisson, par contre les paquets arrivant à l'instant t et à l'instant $t + \Delta$ sont très dépendants les uns des autres, puisque ceux qui sont arrivés à l'instant t, sauf si c'étaient les derniers mots du message, sont tels qu'à l'instant $t + \Delta$ le mot suivant du message arrivera. Si Δ est assez grand devant les différents temps de séjour d'un paquet dans le système, on pourra considérer que lorsqu'un paquet arrive le paquet précédent du même message a déjà quitté le système et qu'il y a indépendance entre les différents paquets. Cependant après la traversée du système la distance entre 2 mots d'un message varie et peut diminuer, et au bout d'un certain nombre de noeuds, il se peut que deux paquets d'un même message soient très rapprochés, il se peut même éventuellement que l'ordre des paquets soit inversé ce qui pose un problème pour la future compréhension du message.

Hypothèse de stationnarité :

Nous n'étudierons que l'état limite stationnaire. Nous reviendrons plus loin sur cette question qui est une question délicate, toutefois indiquons déjà qu'afin de créer un flux de paquets stationnaire nous avons généré des paquets pendant une durée qui est approximativement double de la durée moyenne d'un message.

Quelques valeurs numériques utilisées pour la simulation.

n = 14 = nombre de jonctions entrantes.

s = 6 = nombre de liaisons de sélection.

δ = 4 = durée du service des jonctions.

Δ = 130 = durée séparant 2 mots d'un message.

μ = 4000 = moyenne du nombre de paquets d'un message.

$\mu\Delta = 5.2 \times 10^5$ = durée moyenne d'un message

durée d'initialisation pour la génération des messages : 10^6.

Les simulations ont été faites avec des capacités pour les mémoires de sorties : $k+1$ = 2 ou 3, et différents intervalles moyens séparant deux débuts de message : d.

Evaluons *les taux de trafic :*

Il débute en moyenne un message de μ paquets toutes les d unités de temps. A l'état stationnaire le nombre moyen de paquets arrivant par unité de temps est : $\frac{\mu}{d}$.

Pour l'une des n jonctions entrantes, le nombre moyen de paquets arrivant par unité de temps est : $a = \frac{\mu}{nd} = \frac{4000}{14\,d}$.

Le taux de trafic pour une jonction entrante est donc :

$$\frac{\mu\,\delta}{n\,d} = \frac{8000}{7d}$$

Il est donc indispensable d'avoir $d > \frac{8000}{7}$ si on veut que le système ait une chance d'être stationnaire.

Considérons les liaisons de sélection. Le taux de trafic correspondant au flux des paquets arrivant pour la première fois sur les liaisons de sélection est :

$$\frac{\mu \times 1}{s \quad d} = \frac{2000}{3d}$$

Ce taux est plus faible que le précédent, mais il faudrait ajouter le taux correspondant au flux des paquets provenant des mémoires tampon intermédiaires.

Lavenberg [145] a démontré que le flux limite entre les flux provoquant l'établissement d'un état stationnaire et les flux amenant une divergence, était le flux correspondant à la sortie d'un système saturé. Cette démonstration a été faite moyennant les hypothèses suivantes : arrivées formant un processus de renouvellement, durées de service dont les fonctions de répartition ont des transformées de L.S. rationnelles (donc cela ne s'applique pas pour les durées de service constantes) et durées de service et intervalles entre deux arrivées mutuellemnt indépendantes. Le résultat qui est intuitivement évident, pourrait sans doute se démontrer dans le cas où les services sont constants. Il est clair en tout cas que si on veut espérer une stationnarité il faut que le taux d'arrivée soit inférieur ou égal au taux de sortie du système saturé.

Si les jonctions sortantes sont saturées, l'espérance du nombre de sorties par unité de temps est :

$$\frac{n}{\delta} = \frac{14}{4} = 3.5$$

Si les liaisons de sélection sont saturées, l'espérance du nombre de paquets offerts aux jonctions sortantes par unité de temps est :

$$\frac{s}{1} = 6$$

Le flux sortant du système saturé a donc un taux de 3.5. Le flux entrant ne peut permettre un régime stationnaire que s'il est inférieur à 3.5.

Nous considérerons dans la suite un flux entrant inférieur à 3.5. Nous ne démontrerons pas l'existence de la stationnarité, mais pour certaines parties du système l'existence d'une solution stationnaire.

VI.2 Définition des variables et mise en équation

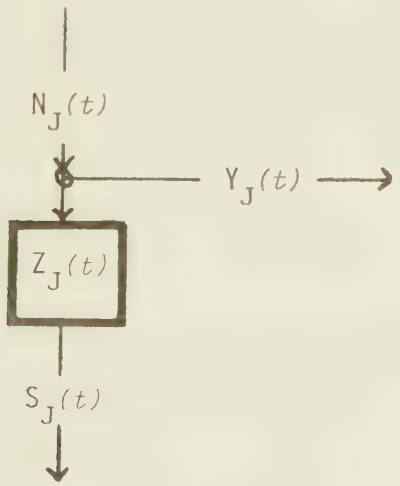
Considérons *une jonction sortante n° J :*

A l'instant (t) il arrive $N_J(t)$ paquets.

A l'instant $(t-1)$ il y avait $Z_J(t)$ paquets.

Certains des $N_J(t)$ paquets pourront entrer mais la capacité de la jonction J étant finie, certains des $N_J(t)$ paquets seront détournés sur les mémoires tampon : nous appellerons leur nombre $Y_J(t)$.

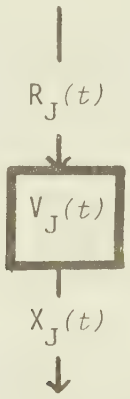
Certains des $Z_J(t)$ paquets sortiront à l'instant t : nous appellerons leur nombre $S_J(t)$. Le schéma d'une jonction sortante est donc le suivant :



Jonction sortante

Considérons *une jonction entrante n°* J.

A l'instant t il arrive $R_J(t)$ paquets, il y avait à t-1 : $V_J(t)$ paquets et il sort $X_J(t)$ paquets. La capacité des mémoires tampon est supposée ∞ .



Considérons l'ensemble des s liaisons de sélection .

Le trafic offert est composé du trafic provenant des mémoires tampon d'entrée, et du trafic provenant des mémoires tampon intermédiaires.

A l'instant $(t\text{-}1)$ il y avait dans l'ensemble des n mémoires tampon d'entrée $W(t)$ paquets, et il arrive à l'instant t : $X(t)$ paquets provenant des jonctions entrantes.

$$X(t) = \sum_J X_J(t) \quad (1)$$

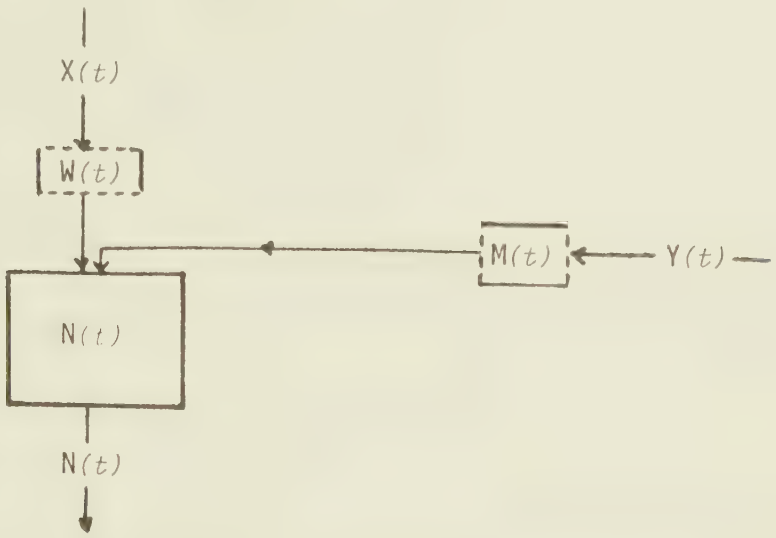
A l'instant $(t\text{-}1)$ il y avait dans l'ensemble des mémoires tampon intermédiaires $M(t)$ paquets et il arrive à l'instant t : $Y(t)$, il s'agit de ceux qui ont été détournés n'ayant pas pu entrer dans les jonctions sortantes.

$$Y(t) = \sum_J Y_J(t) \quad (2)$$

A l'instant $(t\text{-}1)$ il y a dans l'ensemble des s liaisons de sélection $N(t)$ paquets qui sortent à l'instant t, et forment le trafic offert à l'ensemble des jonctions sortantes :

$$N(t) = \sum_J N_J(t) \quad (3)$$

Le schéma pour l'ensemble des s liaisons est donc :



Ensemble des liaisons de sélection

Remarque : $W(t) + M(t)$ représente l'ensemble du trafic offert aux liaisons, mais les liaisons n'en prennent qu'une partie et laissent le reste dans les mémoires tampon. En réalité il y a s liaisons de sélection de capacité 1, qui acceptent au maximum s paquets parmi ceux qui sont disponibles. Comme le modèle mathématique serait vraiment trop compliqué nous n'allons pas tenir compte dans les calculs théoriques de cette question de disponibilité. Nous supposerons que les liaisons de sélection choisissent au hasard s paquets parmi les $W(t) + X(t) + M(t) + Y(t)$. Avec ce modèle mathématique on a une chance très faible de choisir 2 paquets de la même file, n étant grand devant s. Nous prendrons donc :

$$N(t) = inf\ (s,\ W(t) + X(t) + M(t) + Y(t))$$

Si $W(t) + X(t) + M(t) + Y(t) \leq s$ $\quad W(t+1) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad M(t+1) = 0$

Si $W(t) + X(t) + M(t) + Y(t) \geq s$, les liaisons choisissent au hasard un nombre α de paquets parmi les $W(t) + X(t)$ et un nombre β de paquets parmi les $M(t) + Y(t)$ avec :

$$\alpha + \beta = s$$

$$W(t+1) = W(t) + X(t) - \alpha$$

$$M(t+1) = M(t) + Y(t) - \beta$$

En réalité dans un premier temps nous n'allons pas chercher la loi de $W(t)$ et celle de $M(t)$ séparément. Nous allons considérer seulement leur somme $L(t)$:

$$L(t) = W(t) + M(t)$$

Les équations sont donc :

(4) $N(t) = min\ (s,\ L(t) + X(t) + Y(t))$

(5) $L(t+1) = max\ (0,\ L(t) + X(t) + Y(t) - s)$

Dans la suite nous allons supposer que les paquets circulant dans le système sont indépendants les uns des autres, ainsi chacun des $N(t)$ paquets a une probabilité $\frac{1}{n}$ d'être destiné à la jonction J.

Nous supposerons que pour chaque jonction ou liaison, à chaque instant t, le flux offert est indépendant du flux offert à un autre instant t' ($t' \neq t$), et indépendant du nombre de paquets présents à l'instant $t-1$ dans la jonction ou dans la liaison. Ceci est une approximation que nous justifierons par la simulation. Le système est suffisamment volumineux pour que cette approximation soit raisonnable.

Définissons la caractéristique de la loi de probabilité de $N(t)$ par :

$$\alpha(u) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{s} Pr\ (N(t) = i)\ u^i \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{s} \alpha_i\ u^i$$

De,

$$Pr(N_J(t) = 1 \ /\ N(t) = 1) = \frac{1}{n}$$

$$Pr(N_J(t) = 0 \ /\ N(t) = 1) = 1 - \frac{1}{n}$$

on déduit que si on conditionne par $(N(t) = 1)$ la caractéristique de $N_J(t)$ est $(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} u)$, et si on conditionne par $N(t) = i$, on a i

variables indépendantes de caractéristique $(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}u)$. La caractéristique de la variable $N_J(t)$ est :

$$\eta(u) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{\infty} Pr(N_J(t) = i)\, u^i$$

$$(3)' \qquad \eta(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left[1+\frac{1}{n}(u-1)\right]^i$$

Du fait des hypothèses faites les processus $N_J(t)$ et $L(t)$ sont des processus de renouvellement. Remarquons que $Z_J(t)$ n'est pas un processus de Markov en effet pour connaître l'évolution future de $Z_J(t)$, il faut, si toutefois $Z_J(t) \neq 0$, savoir depuis combien de temps le service est commencé.

Si le service n'est pas commencé depuis un temps $\delta-1$

$$(6) \quad Z_J(t+1) = min\,[r+1,\ Z_J(t)+N_J(t)]$$

$$(7) \quad Y_J(t+1) = N_J(t)-(Z_J(t+1)-Z_J(t))$$
$$= max\,[0, Z_J(t)+N_J(t)-(r+1)]$$

$$(8) \quad S_J(t+1) = 0$$

Si le service est commencé depuis un temps $\delta-1$, ce qui suppose $Z_J(t) > 0$, il y a un départ à l'instant $t+1$.

$$(6)' \quad Z_J(t+1) = min\,[r,\ Z_J(t)+N_J(t)-1]$$

$$(7)' \quad Y_J(t+1) = max\,[0, Z_J(t)+N_J(t)-(r+1)]$$

$$(8)' \quad S_J(t+1) = 1$$

L'équation (6)' est due au fait qu'a aucun moment entre t et $t+1$, on ne veut que la capacité de la jonction sortante dépasse $r+1$, on suppose que l'instant $t+1$ est exactement celui du départ d'un paquet.

Nous allons d'abord chercher quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n définie de la façon suivante :

Etant donné une jonction J, Z_n *est la longueur de la file immédiatement après le* $n^{ième}$ *départ*, dans la jonction J.

Le processus Z_n est évidemment un processus de Markov.

- si $Z_n \neq 0$, le départ suivant se produira au bout d'un temps δ, et pour calculer $Z_{n+1} - Z_n$ il faudra tenir compte de δ variables aléatoires indépendantes ayant pour loi celle de $N(t)$. Si t_n est l'instant du $n^{\text{ième}}$ départ, définissons la variable :

$$N_n^{(\delta)}(t) = \sum_{t=t_n+1}^{t=t_n+\delta} N(t)$$

$N_n^{(\delta)}$ a pour caractéristique :

$$v(u) = \eta^{\delta}(u)$$

$$Z_n \neq 0 \Rightarrow Z_{n+1} = min\ (r, Z_n - 1 + N_n^{\delta})$$

- si $Z_n = 0$, le prochain départ aura lieu un temps δ après la première arrivée. Il faudra donc tenir compte de la somme de $\delta+1$ variables indépendantes ayant pour loi celle de $N(t)$, mais la première étant conditionnée par le fait qu'elle est supérieure à 1 et modifiée par le fait qu'on lui enlève 1.

Il faut considérer :

$$M_n^{\delta} = \left[N(t_n)/(N(t_n)\geq 1)\right] - 1 + \sum_{t=t_n+1}^{t=t_n+\delta} N(t)$$

La variable $\left[N(t_n)/(N(t_n)\geq 1)\right]$ a pour caractéristique :

$$\frac{\sum_{1}^{s} \eta_i\, u^i}{1-\eta_0}$$

La variable M_n^{δ} a donc pour caractéristique :

$$\mu(u) = \eta^{\delta}(u) \left[\frac{\sum_{1}^{s} \eta_i\, u^{i-1}}{1-\eta_0}\right]$$

$$\mu(u) = \frac{\eta^{\delta}(u)\,[\eta(u)-\eta_0]}{u(1-\eta_0)}$$

$$Z_N = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = \min(r, M_n^{\delta})$$

Après avoir trouvé la loi de Z_n, nous chercherons la loi du couple (Z_t, D_t) où D_t représente le temps depuis lequel le service est commencé. Le processus (Z_t, D_t) est bien une chaîne de Markov.

$$Z_t \in [0,1,2, \ldots\ldots r+1]$$

$$D_t \in [0,1, \ldots\ldots \delta]$$

En réalité nous pourrions prendre $D_t \leq \delta-1$, mais afin de bien distinguer les couples pour lesquels le service vient de se terminer et les couples pour lesquels le service n'est pas commencé, nous choisirons d'écrire lorsque le service vient de se terminer que $D_t = \delta$.

3) $\begin{cases} Z_{t+1} \text{ se déduit de } Z_t \text{ par (7) ou (7') suivant que } D_t \neq \delta-1 \text{ ou } D_t = \delta-1 \\ \text{Si } D_t = \delta, \text{ ou } 0, \begin{cases} D_{t+1} = 0 & \text{si } Z_t = 0 \\ D_{t+1} = 1 & \text{si } Z_t \neq 0 \end{cases} \\ \text{Si } D_t \neq \delta, \text{ et } 0, \quad D_{t+1} = D_t + 1 \end{cases}$

Nous pouvons faire pour le passage de $Y_J(t)$ à $Y(t)$, le même raisonnement que pour celui de $N_J(t)$ à $N(t)$, si $Y(t)$ a pour caractéristique $\Theta(u)$ et si $Y_J(t)$ a pour caractéristique $\gamma(u)$ on a :

$$(2') \quad \gamma(u) = \sum_{i=0}^{s} \Theta_i \left(1 + \frac{1}{n}(u-1)\right)^i$$

Enfin les équations pour les jonctions entrantes sont analogues aux équations pour les jonctions sortantes en faisant tendre r vers l'infini. Pour étudier la chaîne de Markov $(V_J(t), B_J(t))$, où $B_J(t)$ est le temps depuis lequel le service est commencé on a le système d'équations :

$$\text{Si } B_J(t) \neq \delta-1, \quad \begin{cases} V_J(t+1) = V_J(t) + R_J(t) \\ X_J(t+1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } B_J(t) = \delta-1, \quad \begin{cases} V_J(t+1) = V_J(t) + R_J(t)-1 \\ X_J(t+1) = 1 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\text{Si } B_J(t) = \delta \text{ ou } 0, \begin{cases} B_J(t+1) = 0 \quad \text{si } V_J(t) = 0 \\ B_J(t+1) = 1 \quad \text{si } V_J(t) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } B_J(t) \neq \delta \text{ et } 0, \; B_J(t+1) = B_J(t) + 1$$

Nous allons d'abord essayer de résoudre ce système d'équations, dans le cas de la stationnarité puis nous présenterons les résultats de la simulation. L'étude théorique que nous avons faite utilise des projecteurs que nous allons définir au VI.3.

VI.3. Projecteurs

Soit une fonction $f(x)$ admettant un développement en série entière pour $x \leq 1 \quad x \in R$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \, x^i \qquad (11)$$

$$f(1) = \Sigma f_i$$

Définissons l'opérateur Π_h que nous appellerons projecteur de f, qui à la fonction f associe la fonction $\Pi_h [f]$ définie par :

$$\Pi_h [f] = \sum_{i=0}^{h} f_i \, x^i + x^h \sum_{i=h+1}^{\infty} f_i \qquad (12)$$

$$\Pi_h (f) = \sum_{0}^{\infty} f_i \, x^i + x^h [f(1) - \sum_{i=0}^{h} f_i]$$

Donnons quelques propriétés de ces projecteurs.

$$\Pi_h^2 = \Pi_h \qquad (13)$$

Il s'agit évidemment du carré au sens des compositions d'applications.

- Si f est un polynôme de degré $\leq n$

$$\Pi_n [f] = f \qquad (14)$$

- Π_n est linéaire: $\forall \lambda$ et $\mu \in R$ et f et g développables en séries entières.

$$\Pi_n [\lambda f + \mu g] = \lambda \Pi_n [f] + \mu \Pi_n [g] \qquad (15)$$

- Pour $k \in N$, $k \geq 0$

$$x^k \Pi_n [f] = \Pi_{n+k} [x^k f] \qquad (16)$$

- $$\Pi_{n+k} \Pi_n = \Pi_n = \Pi_n \Pi_{n+k} \qquad (17)$$

Définissons l'opérateur $\mathcal{L}_n$ par :

$$\mathcal{L}_n [f] = (1 - \Pi_n) [f] = f - \Pi_n [f] \qquad (18)$$

$$\mathcal{L}_n [f] = -u^n (f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots) + u^{n+1} (f_{n+1}) + u^{n+2} (f_{n+2}) + \ldots$$

- $\mathcal{L}_n$ est évidemment aussi linéaire. (19)

- $$\mathcal{L}_n \Pi_n = \Pi_n \mathcal{L}_n = 0$$

- $$\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n \qquad (20)$$

- Considérons la fonction $g(x)$:

$$g(x) = (f_0 + f_1 + \ldots f_n) + x f_{n+1} + \ldots x^k f_{n+k} + \ldots \qquad (21)$$

Démontrons la relation :

$$g(x) = f(1) + x^{-n} \mathcal{L}_n [f] \qquad (22)$$

On a : $x^n g(x) = x^n (f_0 + f_1 + \ldots f_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i f_i$

$$x^n g(x) + \Pi_n [f] = \sum_{0}^{\infty} f_i x^i + x^n f(1)$$

Donc $x^n (g(x) - f(1)) = (1 - \Pi_n) [f]$

- Définissons aussi l'opérateur $\mathcal{R}_n$ qui est la restriction au degré n de $f(x)$.

$$\mathcal{R}_n [f] = \sum_0^n f_i x^i \qquad (23)$$

On peut remarquer que :

$$\Pi_n [f] = \mathcal{R}_n [f] + x^n (f_{n+1} + \dots)$$

$$\Pi_{n+1} [f] = \mathcal{R}_n [f] + x^{n+1} (f_{n+1} + \dots.)$$

Donc :

$$\Pi_{n+1} [f] - x \Pi_n [f] = (1-x) \mathcal{R}_n [f] = \Pi_{n+1} [(1-x) f]$$

$$\mathcal{R}_n [f] = \frac{\Pi_{n+1} [(1-x) f]}{1-x} \qquad (24)$$

Démontrons la relation suivante :

$$\Pi_n [fg] = \Pi_n [f \Pi_n [g]] = \Pi_n [\Pi_n [f] . g] \qquad (25)$$
$$= \Pi_n [\Pi_n [f] \Pi_n [g]]$$

Démonstration :

$$f g = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{i=0}^{p} (f_i g_{p-i}) \overset{def}{=} \sum_{p=0}^{\infty} (fg)_p x^p$$

$$\Pi_n [fg] = \sum_{p=0}^{n-1} x^p \left(\sum_{i=0}^{p} f_i g_{p-i} \right) + x^n \left(\sum_{p=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} f_i g_{p-i} \right)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} x^p (fg)_p + x^n \alpha$$

avec $$\alpha = \sum_{i=0}^{n} f_i \left(\sum_{p=n}^{\infty} g_{p-i} \right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i \left(\sum_{p=i}^{\infty} g_{p-i} \right)$$

$$\alpha = f_0 (g_n + \dots.) + f_1 (g_{n-1} + \dots.) + \dots. + f_{n-1} (g_1 + \dots.)$$

$$+ f_n . g(1) + \dots. + f_{n+k} . g(1) + \dots.$$

Posons $$\Pi_n [g] = g'$$

On a donc : $g'_0 = g_0 \, , \ldots \; g'_{n-1} = g_{n-1} \, ,$

$g'_n = (g_n + \ldots .), \; g'_{n+i} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 0$

Calculons $\Pi_n [f \, g']$. Nous voulons démontrer qu'il est égal à $\Pi_n [f \, g]$.

$$\Pi_n [fg'] = \sum_{p=0}^{n-1} x^p (fg)_p + x^n \alpha'$$

$$\alpha' = f_0 \cdot g'_n + f_1 (g_{n-1} + g'_n) + \ldots f_n \cdot g(1) + \ldots + f_{n+k} \cdot g(1) + \ldots$$

$$\alpha' = \alpha$$

- Démontrons une relation analogue à (16) pour l'opérateur $\mathcal{L}$.

$$u^k \mathcal{L}_n [f] = u^k f - u^k \Pi_n [f]$$

$$= u^k f - \Pi_{n+k} [u^k f]$$

Donc $$u^k \mathcal{L}_n [f] = \mathcal{L}_{n+k} [u^k f] \qquad (26)$$

- Résolution de l'équation $\Pi_n [f] = 0$

$$\Pi_n [f] = f_0 + f_1 x + \ldots f_{n-1} x^{n-1} + x^n [f_n + f_{n+1} + \ldots] = 0$$

$$f_0 = f_1 = \ldots . = f_{n-1} = 0$$

$$f_n + f_{n+1} + \ldots . = 0$$

$$\Pi_n [f] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x^n \varphi(x) \qquad (27)$$

avec $\varphi(1) = 0$

Il s'ensuit que

$$\Pi_n [f] = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_{n-i} [f] = 0$$

- Résolution de l'équation : $\Pi_n [fg] = 0$

avec $f_0 \neq 0$

D'après (27) : $fg = x^{\ell}\,\varphi(x)$

Comme $f_0 \neq 0$ celà s'écrit : $g(x) = x^{\ell}\,\gamma(x)$

$$\Pi_{\ell}\,[fg] = 0 \quad \text{avec} \quad f_0 \neq 0 \;\Rightarrow\; g = x^{\ell}\,\gamma(x) \qquad (28)$$

$$\text{avec} \quad f(1)\,\gamma\,(1) = 0$$

VI.4. Pour une jonction sortante J, étude de la chaîne de Markov incluse

Il y a symétrie entre les n jonctions sortantes. Dans tout ce paragraphe nous considérerons l'une d'entre elles.

$Z_n \overset{def}{=}$ longueur de la file immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ départ, dans la jonction J.

$$Z_n = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{n+1} = min(\ell, M_n^{\delta})$$

$$Z_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{n+1} = min(\ell, Z_n - 1 + N_n^{\delta})$$

M_n^{δ} a pour caractéristique $\mu(u)$

$$\mu(u) = \eta^{\delta}(u)\,\frac{1}{u}\,\frac{\eta(u)-\eta_0}{1-\eta_0}$$

N_n^{δ} a pour caractéristique $\nu(u)$

$$\nu(u) = \eta^{\delta}(u)$$

Calculons la caractéristique $\xi(u)$ de Z_n :

$$\xi(u) = \sum_0^{\ell} \xi_k\, u^k$$

$$\xi_k = Pr\,[Z_n = k]$$

Nous cherchons la solution stationnaire :

$$\xi_k = Pr\,[Z = k]$$

Elle est solution du système obtenu à partir des équations :

$$Pr\,|\,Z_{n+1}=j\,| \;=\; \sum_{i} \; Pr\,|\,Z_{n+1}=j \;/\; Z_{n}=i\,| \quad Pr|\,Z_{n}=i|$$

On doit donc résoudre le système :

$$\xi_0 = \xi_0\mu_0 + \xi_1\nu_0$$

$$\xi_1 = \xi_0\mu_1 + \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_0$$

$$\xi_2 = \xi_0\mu_2 + \xi_1\nu_2 + \xi_2\nu_1 + \xi_3\nu_0$$

(29) $$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\xi_j = \xi_0\mu_j + \sum_{i=0}^{j} \xi_{i+1}\,\nu_{j-i}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\xi_{n-1} = \xi_0\mu_{n-1} + \xi_1\nu_{n-1} + \ldots\ldots \xi_n\nu_0$$

$$\xi_n = \xi_0\,[\,\mu_n+\mu_{n-1}+\ldots\ldots] + \xi_1\,[\,\nu_n+\ldots\ldots] + \ldots\ldots \xi_n\,[\,\nu_1+\nu_2+\ldots]$$

Calculons $\xi(u)$ en faisant la somme des lignes après avoir multiplié la ligne j par u^j.

On obtient :

$$\sum_{0}^{n} \xi_j\,u^j = \xi_0 \left\{ \sum_{0}^{n-1} \mu_j\,u^j + u^n\,[\,\mu_n + \ldots\ldots\,] \right\}$$

$$+ \xi_1 \left\{ \sum_{0}^{n-1} \nu_j\,u^j + u^n\,[\,\nu_n + \ldots\ldots\,] \right\}$$

$$+ \xi_2 \left\{ \sum_{0}^{n-2} \nu_j\,u^j + u^{n-1}\,[\,\nu_{n-1} + \ldots\ldots] \right\}$$

$$+ - - - - - - - - - - \quad - - - - - - - - - -$$

$$+ \xi_j u^{j-1} \left\{ \sum_{0}^{n-j} \nu_j u^j + u^{n-j+1}\,[\,\nu_{n-j+1} + \ldots\ldots\,] \right\}$$

$$+ -$$

$$+ \xi_n u^{n-1}\,[\,\nu_0 + u(\nu_1+\ldots\ldots)]$$

$$\xi(u) = \xi_0\,\Pi_n\,[\,\mu(u)] + \xi_1\,\Pi_n\,[\,\nu(u)] + \xi_2 u\;\Pi_{n-1}\,[\,\nu(u)]$$

$$+ \ldots + \xi_j u^{j-1}\;\Pi_{n-j+1}\,[\,\nu(u)] + \ldots\ldots + \xi_n u^{n-1}\;\Pi_1\,[\,\nu(u)]$$

Or $\quad u^k \ \Pi_s(f) = \Pi_{s+k}(u^k f)$

Donc :

$$\xi(u) = \xi_0 \ \Pi_n [\mu(u)] + \xi_1 \ \Pi_n [\nu(u)] + \xi_2 \ \Pi_n [u\nu(u)]$$

$$+ \ldots. \ \xi_j \ \Pi_n [u^{j-1}\nu(u)] + \ldots. + \xi_n \ \Pi_n [u^{n-1}\nu(u)]$$

$$\xi(u) = \Pi_n \left[\xi_0 \mu(u) + \nu(u) \sum_{i=1}^{n} \xi_i \ u^{i-1}\right] \qquad (30)$$

En fait : $\quad \sum_{1}^{n} \xi_i \ u^{i-1} = \frac{1}{u} [\xi(u) - \xi_0]$

$$\xi(u) = \Pi_n \left[\xi_0 \ \mu + \nu \ \frac{\xi - \xi_0}{u}\right]$$

$$u \ \xi(u) = \Pi_{n+1} \ [\xi_0 \ [u \ \mu(u) - \nu(u)] + \nu(u) \ \xi \ (u)] \qquad (31)$$

Le système (29) conduit à $\xi_1(\xi_0) \ldots. \ \xi_n(\xi_0)$ et on déduit ξ_0 de la relation

$$\xi_0 + \xi_1 + \ldots. \ \xi_n = 1$$

On peut donc déterminer une solution $\zeta(u)$ de l'équation :

$$u \ \zeta(u) = \Pi_{n+1} \ [\zeta_0 \ [u \ \mu(u) - \nu(u)] + \nu(u) \ \zeta(u)] \qquad (32)$$

et choisir :

$$\xi(u) = \frac{\zeta(u)}{\zeta(1)}$$

Si la file avait une capacité infinie, on aurait le système :

$$u \ x(u) = x_0 \ [u \ \mu(u) - \nu(u)] + \nu(u) \ x(u)$$

Soit $[\nu(u)- u]\ x\ (u) = x_0\ [\nu(u)- u\ \mu(u)]$

$$= x_0 \left[\nu(u)- \nu(u)\ \frac{\eta-\eta_0}{1-\eta_0}\right]$$

$$= x_0\ \nu(u)\ \left[\frac{1-\eta(u)}{1-\eta_0}\right]$$

$$x(u) = \frac{x_0}{1-\eta_0}\ \nu(u)\ \frac{1-\eta\ (u)}{\nu(u)-u}$$

Les n premières équations déterminant x_1 , x_2 .... x_n en fonction de x_0 sont identiques aux n premières équations déterminant ζ_1 ... ζ_n en fonction de ζ_0 , ainsi évidemment que les équations déterminant ξ_1 ... ξ_n en fonction de ξ_0 . On peut donc prendre pour $\xi(u)$, la restriction au degré n de n'importe quelle fonction de u proportionnelle à $x(u)$. Pour obtenir $\xi(u)$ il faut ensuite normaliser.

En utilisant les notations de VI.3. on peut écrire :

$$X(u) = \frac{\nu(u)\ (1-\eta(u))}{\nu(u)- u}$$

$$\zeta(u) = \mathcal{R}_n\ [X(u)]$$

$$= \frac{\Pi_{n+1}\ [(1-u)\ X\ (u)]}{(1- u)} \qquad (34)$$

$$\xi(u) = \frac{\zeta(u)}{\zeta(1)}$$

Remarque : On pourrait aussi résoudre par itération le système (29) :

$$\nu_0\ \xi_1 = \xi_0\ (1-\mu_0) \longrightarrow \begin{cases} \xi_1 = A_1\ \xi_0 \\ A_1 = \dfrac{1-\mu_0}{\nu_0} \end{cases}$$

$$\nu_0\ \xi_2 = \xi_1\ (1-\nu_1) - \xi_0\ \mu_1 \longrightarrow \begin{cases} \xi_2 = A_2\ \xi_0 \\ A_2 = A_1\ \dfrac{1-\nu_1}{\nu_0} - \dfrac{\mu_1}{\nu_0} \end{cases}$$

$$\nu_0 \xi_3 = \xi_2(1-\nu_1) - \xi_1\nu_2 - \xi_0\mu_2 \rightarrow \begin{cases} \xi_3 = A_3 \xi_0 \\ A_3 = A_2 \dfrac{1-\nu_1}{\nu_0} - A_1 \dfrac{\nu_2}{\nu_0} - \dfrac{\mu_2}{\nu_0} \end{cases}$$

etc ....

$$\begin{cases} \xi_j = A_j \xi_0 \\ A_j = A_{j-1} \dfrac{1-\nu_1}{\nu_0} - A_{j-2} \dfrac{\nu_2}{\nu_0} \ldots\ldots A_1 \dfrac{\nu_{j-1}}{\nu_0} - \dfrac{\mu_{j-1}}{\nu_0} \end{cases} \qquad (35)$$

avec $\xi_0 [1+A_1+ \ldots\ldots + A_n] = 1$

Cette méthode peut d'ailleurs être la plus efficace.

VI.5. Pour une jonction sortante, étude de la chaîne de Markov $(Z_J(t), D_J(t))$

a) Mise en équation

$Z_J(t)$ = *longueur de la file à l'instant* t.

$D_J(t)$ = *temps depuis lequel le service est commencé. Si le service vient juste de se terminer, on écrit* $D_J(t) = \delta$. *La chaîne étudiée au VI.4. est donc :* $(Z_J(t) / D_J(t) = \delta)$ ($Z_J(t)$ *conditionné par* $D(t) = \delta$)

Les équations (6), (6') et (9) nous permettent d'écrire les probabilités de transition de la chaîne de Markov :

$$P(j,k/i,k') \overset{def}{=} \Pr [Z_J(t+1) = j, D_J(t+1) = k / Z_J(t) = i, D_J(t) = k']$$

Ecrivons les termes non nuls :

Remarquons que :

$$Z_J(t) = 0 \Rightarrow D_J(t) = 0 \quad \text{ou} \quad D_J(t) = \delta$$

$$Z_J(t) = 0 \Rightarrow D_J(t+1) = 0$$

Remarquons aussi que si $Z_J(t)$ atteint $r+1$, la jonction est saturée et $Z_J(t)$ restera égal à $r+1$ jusqu'à la fin du service.

Système 36

$i = 0 \quad k' = 0$

$$P(j,0/0,0) = \eta_j \qquad 0 \le j \le r$$

$$P(r+1,0/0,0) = \eta_{r+1} + \eta_{r+2} + \ldots.$$

$i = 0 \quad k' = \delta$

$$P(j,0/0,\delta) = \eta_j \qquad 0 \le j \le r$$

$$P(r+1,0/0,\delta) = \eta_{r+1} + \eta_{r+2} + \ldots$$

$i \neq 0 \quad k' = 0,1, \ldots. \delta-2$

$$P(j,k+1/i,k) = \eta_{j-i} \qquad 0 < i < j < r$$

$$P(r+1,k+1/i,k) = \eta_{r+1-i} + \eta_{r+2-i} + \ldots. \qquad 0 < i < r+1$$

$i \neq 0 \quad k' = \delta-1$ (transition correspondant à un départ)

$$P(j,\delta/i,\delta-1) = \eta_{j-i+1} \qquad 0 \le i-1 \le j \le r-1$$

$$P(r,\delta/i,\delta-1) = \eta_{r-i+1} + \ldots. \qquad 0 < i \le r+1$$

$i \neq 0 \quad k' = \delta$

$$P(j,1/i,\delta) = \eta_{j-1} \qquad 0 < i \le j \le r$$

$$P(r+1,1/i,\delta) = \eta_{r+1-i} + \ldots. \qquad 0 < i \le r+1$$

Cherchons les $P(i,k)$ solutions stationnaires du système (37) obtenu en écrivant l'axiome des probabilités conditionnelles :

$$P(j,k) = \sum_{i,k'} P(j,k/i,k')\ P(i,k')$$

$k = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 0$ et $k' = 0$ ou δ

$$P(j,0) = \eta_j\ [P(0,0) + P(0,\delta] \qquad 0 \le j \le r$$

$$P(r+1,0) = (\eta_{r+1} + \ldots.)\ [P(0,0) + P(0,\delta)]$$

$k = 1$

$$P(0,1) = 0$$

$$P(j,1) = \sum_{i=1}^{j} \eta_{j-1}\ [P(i,0) + P(i,\delta)] \qquad 1 \le j \le r$$

$$P(r+1,1) = \sum_{i=1}^{r+1} (\eta_{r+1-i} + \ldots.)\ [P(i,0) + P(i,\delta)]$$

$k = 2,3 \ldots. \delta - 1$ (37)

$$P(0,k) = 0$$

$$P(j,k) = \sum_{i=1}^{j} \eta_{j-i}\ P(i,k-1) \qquad 1 < j < r$$

$$P(r+1,k) = \sum_{i=1}^{r+1} (\eta_{r+1-i} + \ldots.)\ P(i,k-1)$$

$k = \delta$

$$P(j,\delta) = \sum_{i=1}^{j+1} \eta_{j-i+1}\ P(i,\delta-1) \qquad 0 \le j \le r-1$$

$$P(r,\delta) = \sum_{i=1}^{r+1} (\eta_{r-i+1} + \ldots)\ P\ (i,\delta-1)$$

$$P(r+1,\delta) = 0$$

b) Premiers calculs

Notre but est de calculer les quantités P_j :

$$P_j = \sum_k P(j,k) \qquad (38)$$

Calculons déjà les S_k :

$$S_k = \sum_j P(j,k) \qquad (39)$$

De (37) on déduit :

$$S_0 = \sum_j P(j,0) = P(0,0) + P(0,\delta) = P_0 \qquad S_0 = P_0 \qquad (38)$$

$k = 2, \ldots \delta - 1$

$$S_k = \sum_j P(j,k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \eta_{j-1} P(i,k-1) + \sum_{i=1}^{n+1} [\eta_{n+1-i} + \ldots] P(i,k-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(i,k-1) \left[\sum_{j=1}^{n} \eta_{j-i} + \eta_{n-i+1} + \ldots \right] + P(n+1,k-1)$$

La quantité entre les crochets vaut 1

Donc on vérifie : $S_k = S_{k-1} \qquad 2 \le k \le \delta - 1$

La même relation s'applique pour $k = \delta$

Donc $$\underline{S_1 = S_2 = \ldots = S_\delta \overset{def}{=} S} \qquad (39)$$

De $\sum_k S_k = 1$, on déduit :

$$\delta S + P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1 - P_0}{\delta}} \qquad (40)$$

Nous avons vu que les Z_n calculés au VI.3. se déduisent des $Z_J(t)$ par :

$$Z_n = (Z_J(t) \;/\; D(t) = \delta)$$

Donc il existe un coefficient α :

$$P(i,\delta) = \alpha \xi_i \qquad i = 0, \ldots n$$

Nous avons vu que $P(n+1,\delta) = 0$

$$S = \sum_i P(i,\delta) = \alpha \sum_0^n \xi_i = \alpha$$

De (40) on déduit donc :

$$P(i,\delta) = \frac{1-P_0}{\delta}\ \xi_i \qquad (41)$$

c) Loi des départs

D'après (8) et (8')

$$Pr\,[S_J(t+1) = 1] = Pr\,[D_J(t+1) = \delta] = S_\delta = S$$

$$Pr\,[S_J(t+1) = 0] = Pr\,[D_J(t+1) \neq \delta]$$

D'après (40)

$$Pr\,[S_J(t+1) = 1] = S = \frac{1-P_0}{\delta} \qquad (42)$$

$$Pr\,[S_J(t) = 0] = 1 - \frac{1-P_0}{\delta}$$

Il sera possible d'obtenir P_0 par des considérations de trafic, en effet la moyenne du trafic sortant de la jonction j est :

$$S = \frac{1-P_0}{\delta}$$

Le trafic total sortant du système est égal à la somme des trafics entrant dans le système.

d) Méthode de calcul des $P(i,k)$ et des P_i

Définissons les fonctions :

$$f_k(u) = \sum_{j=0}^{n+1} P(j,k)u^j$$

$$P(u) = \sum_{k=0}^{\delta} f_k(u) = \sum_{0}^{n+1} P_j\, u^j \qquad (43)$$

* Calcul de f_0

$$0 \le j \le r \qquad P(j,0) = \eta_j \, P_0$$

$$j = r+1 \qquad P(r+1,0) = (\eta_{r+1} + \ldots.) \, P_0$$

$$f_0(u) = P_0 \left[\sum_0^r \eta_j \, u^j + [\eta_{r+1} + \ldots.] \, u^{r+1} \right]$$

$$f_0(u) = P_0 \, \Pi_{r+1} \, [\eta(u)] \qquad (44)$$

* Calcul de f_1 : $P(0,1) = 0$

$$f_1(u) = \sum_{j=1}^{r+1} P(j,1) \, u^j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} u^j \sum_{i=1}^{j} \eta_{j-i} \, [P(i,0) + P(i,\delta)] + u^{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} [\eta_{r+1-i} + \ldots] [P(i,0) + P(i,\delta)]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} [P(i,0) + P(i,\delta)] \left[\sum_{j=i}^{r} u^j \, \eta_{j-i} + (\eta_{r+1-i} + \ldots.) \, u^{r+1} \right]$$

$$+ u^{r+1} [\eta_0 + \ldots.] [P(r+1,0) + P(r+1,\delta)]$$

$$= \sum_{i=1}^{r+1} \Pi_{r+1} \left[[P(i,0) + P(i,\delta)] \, u^i \, \eta(u) \right]$$

$$f_1(u) = \Pi_{r+1} \, [\{f_0(u) + f_\delta(u) - P_0\} \, \eta(u)] \qquad (45)$$

* Calcul de f_k pour $k = 2 \ldots \delta - 1$

$$f_k(u) = \sum_j P(j,k) \, u^j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} u^j \sum_{i=1}^{j} \eta_{j-i} \, P(i,k-1) + u^{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} [\eta_{r+1-i} + \ldots] \, P(i,k-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{r+1} P(i,k-1) \left\{ \sum_{j=i}^{r} u^j \, \eta_{j-i} + u^{r+1} \, (\eta_{r+1-i} + \ldots) \right\}$$

$$f_k(u) = \Pi_{r+1} \, [f_{k-1}(u) \, \eta(u)] \qquad (46)$$

* Calcul de f_δ

$$f_\delta(u) = \sum_{j=0}^{r-1} u^j \sum_{i=1}^{j+1} \eta_{j+1-i}\, P(i,\delta-1) + u^r \sum_{i=1}^{r+1} [\eta_{r-i+1} + \dots P(i,\delta 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} P(i,\delta-1) \left\{ \sum_{j=i-1}^{r-1} \eta_{j-(i-1)}\, u^j + [\eta_{r-(i-1)} + \dots]\, u^r \right\}$$

$$+ u^r [\eta_0 + \dots] P(r+1,\delta-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} P(i,\delta-1)\ \Pi_r [u^{i-1}\ \eta(u)] + \Pi_r[u^r\ \eta(u)]\ P(r+1,\delta-1)$$

$$= \Pi_r \left[\eta(u) \sum_{1}^{r+1} u^{-i}\ P(i,\delta-1)\right]$$

$$= \Pi_r \left[\eta(u)\ \frac{1}{u}\ (f_{\delta-1} - P(0,\delta-1))\right]$$

mais $P(0,\delta-1) = 0$

$$f_\delta(u) = \Pi_r\left[\frac{\eta(u)}{u}\, f_{\delta-1}(u)\right]$$

D'après (16)

$$u\, f_\delta(u) = \Pi_{r+1} [\eta(u)\ f_{\delta-1}(u)] \qquad (47)$$

On peut résumer sur un tableau les relations entre les $f_k(u)$

$$f_0 = \Pi_{r+1}\ [P_0\ \eta]$$

$$f_1 = \Pi_{r+1}\ [f_0\ \eta + f_\delta\ \eta - P_0\ \eta]$$

$$f_2 = \Pi_{r+1}\ [f_1\ \eta]$$

---------- (48)

$$f_{\delta-1} = \Pi_{r+1}\ [f_{\delta-2}\ \eta]$$

$$u\, f_\delta = \Pi_{r+1}\ [f_{\delta-1}\ \eta]$$

Si on connait f_0 donné par le calcul de ξ la première équation donne f_0 , la deuxième f_1 de proche en proche on obtient tous les $f_k(u)$ donc les $P(j,k)$

* Faisons la somme des lignes de (48)

$$[f_0 + \ldots f_{\delta-1} + f_\delta] + (u-1) f_\delta - \Pi_{\kappa+1} [\eta(f_0 + \ldots f_\delta)]$$

Soit

$$\boxed{P(u) = (1-u) f_\delta(u) + \Pi_{\kappa+1} [\eta(u) P(u)]} \qquad (49)$$

$$P(u) = (1-u) \frac{1-P_0}{\delta} \xi(u) + \Pi_{\kappa+1} [\eta(u) P(u)]$$

L'équation (49) est une identité en u qui nous donne $\kappa+1$ équations en égalant les termes de même degré, mais le $\kappa+1^{ème}$ est la somme des κ autres.

e) Loi du trafic détourné :

La relation (7) donne :

$$Pr[Y_J(t+1) = 0 | Z_J(t)=i] = Pr[N_J(t+1) \leq \kappa+1-i]$$

$$j \neq 0 : Pr[Y_J(t+1) = j / Z_J(t) = i] = Pr[N_J(t+1) = \kappa+1-i+j]$$

La caractéristique $\gamma(u)$ de la variable $Y_J(t)$, est donc, lorsque l'état stationnaire est atteint, obtenue par :

$$\gamma_0 = Pr[Y_J = 0] = \sum_{i=0}^{\kappa+1} P_i [\eta_0 + \ldots \eta_{\kappa+1-i}]$$

$$\gamma_j = Pr[Y_J = j] = \sum_{i=0}^{\kappa+1} P_i \eta_{\kappa+1+j-i} \quad , \quad 1 \leq j \leq s \qquad (50)$$

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^{\kappa+1} P_i [(\eta_0 + \ldots + \eta_{\kappa+1-i}) + \sum_{j=1}^{s} u^j \eta_{\kappa+1-i+j}]$$

d'après la relation (22) le terme entre les crochets vaut :

$$[\ldots.] = 1 + u^{-(\kappa+1-i)} \mathcal{L}_{\kappa+1-i}[\eta]$$

$$\gamma(u) = 1 + u^{-(n+1)} \sum_{i=0}^{n+1} P_i\, u^i\, \mathcal{L}_{n+1-i}(\eta)$$

$$= 1 + u^{-(n+1)} \sum_{i=0}^{n+1} P_i\, u^i\, [\eta(u) - \Pi_{n+1-i}(\eta/u)]$$

$$= 1 + u^{-(n+1)} \{P(u)\, \eta(u) - \Pi_{n+1}[P(u)\, \eta(u)]\}$$

d'après (16), et (15).

$$\gamma(u) = 1 + u^{-(n+1)}\, \mathcal{L}_{n+1}[\eta(u)\, P(u)] \qquad (51)$$

$$u^{n+1}[\gamma(u) - 1] = P(u)\, \eta(u) - \Pi_{n+1}[P(u)\, \eta(u)]$$

D'après (49)

$$u^{n+1}[\gamma(u) - 1] = P(u)\, \eta(u) - P(u) + (1-u)\, f_\delta(u)$$

$$= (1-u)\, f_\delta(u) + P(u)\, [\eta(u) - 1]$$

$$\boxed{\gamma(u) = 1 + u^{-(n+1)} \{(1-u)\, f_\delta(u) + P(u)\, [\eta(u) - 1]\}} \qquad (52)$$

Application :

Calcul de la moyenne du trafic détourné :

$$\gamma'(1) = \eta'(1) - S$$

Nous retrouvons bien une relation qui était évidente d'après (42)

f) Calcul de $P(u)$

* Cherchons la solution correspondant à *une capacité* ∞.

D'après (49)

$$P(u) = \frac{1-u}{1-\eta(u)} \quad \frac{1-P_0}{\delta}\, \xi(u)$$

Pour n infini $\xi(u)$ est donné par (33)

$$P(u) = (1-u) \quad \frac{x_0}{1-\eta_0} \quad \frac{\nu(u)}{\nu(u)-u} \quad \frac{1-P_0}{\delta}$$

D'autre part $P_0 - P(0) = \frac{1-P_0}{\delta} \quad \frac{x_0}{1-\eta_0}$

Donc :

$$P(u) = P_0 \quad \frac{(1-u)\ \nu(u)}{\nu(u)-u} \tag{53}$$

On doit avoir $P(1) = 1$

$$\text{Donc} \quad P_0 = 1 - \delta\ \eta_1'(1) \tag{54}$$

* Dans le cas où r est fini.

(34) s'écrit :

$$(1-u)\ \zeta(u) = \Pi_{r+1} \left[(1-u) \quad \frac{\nu(u)(1-\eta(u))}{\nu(u)-u} \right]$$

$$\xi(u) = \frac{\zeta(u)}{\zeta(1)}$$

D'après (49)

$$P(u) = \frac{1-P_0}{\delta\ \zeta(1)} \quad \Pi_{r+1} \left[(1-u) \quad \frac{\nu(u)(1-\eta(u))}{\nu(u)-u} \right] + \Pi_{r+1} \left[\eta(u)\ P(u) \right]$$

Puis $P(u)$ étant de degré $r+1$, (14) s'applique.

$$\Pi_{r+1} \left\{ [1-\eta(u)] \left[P(u) - \frac{(1-P_0)}{\delta\ \zeta(1)} \quad \frac{(1-u)\ \nu(u)}{(\nu(u)-u)} \right] \right\} = 0 \tag{55}$$

L'équation (55) peut s'écrire :

$$\Pi_{r+1} [fg] = 0 \quad \text{avec} \quad f(u) = 1-\eta(u)$$

$$\text{et} \quad g(u) = P(u) - \frac{1-P_0}{\delta\ \zeta(1)} \quad \frac{(1-u)\ \nu(u)}{(\nu(u)-u)}$$

D'après (28), comme $f_0 = 1-\eta_0 \neq 0$, on sait que $g(u)$ est un polynôme dont les termes de degré $0,1 \ldots r$ sont nuls :

$$g(u) = u^{r+1}\ h(u)$$

Par ailleurs $f(1)\ h(1) = 0$

Ici $f'(1) = 0$ donc $h(1)$ est indéterminé. Ceci implique que le terme de degré $r+1$ de $P(u)$ donc P_{r+1} ne peut pas être déterminé par (55). En fait on devra écrire :

$$P_{r+1} = 1 - [P_0 + \dots P_r]$$

Soit $T(u) = \mathcal{R}_r \left[\frac{(1-u)\ \nu(u)}{\nu(u)-u}\right]$ (56)

On peut cacluler P_0 par une relation concernant les trafics, ou grâce à ξ_0 en utilisant VI.4.

$$P_0 = \frac{1-P_0}{\delta\ \zeta(1)} = \frac{(1-P_0)\ \xi_0}{\delta(1-\eta_0)} \qquad (57)$$

La relation (55) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} P(u) &= P_0\ T(u) + u^{r+1}\ [1-(P_0 + \dots P_r)] \\ T(u) &= \mathcal{R}_r \left[\frac{(1-u)\ \nu(u)}{\nu(u)-u}\right] \end{aligned}} \qquad (58)$$

g) Cas particulier $r = 1$

Il est plus rapide de résoudre directement les équations itératives

A. Calcul des ξ $\qquad \xi_1 = \frac{1-\mu_0}{\nu_0}\ \xi_0$

$$\xi_0 + \xi_0 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\xi_0 = \frac{\nu_0}{1-\mu_0+\nu_0}\ ;\ \xi_1 = \frac{1-\mu_0}{1-\mu_0+\nu_0} \qquad (59)$$

avec $\nu_0 = \eta_0^{\delta}$ $\qquad \mu_0 = \nu_0\ \frac{\eta_1}{1-\eta_0}$ $\qquad \xi_0 = \frac{\nu_0(1-\eta_0)}{(1-\eta_0) + \nu_0(1-\eta_0-\eta_1)}$

B. Calcul des P_i

D'après (58) $P_0 = \frac{\xi_0}{\xi_0 + \delta(1-\eta_0)}$ (60)

$$P_0 = \frac{\nu_0}{\nu_0 + \delta[1-\eta_0+\nu_0(1-\eta_0-\eta_1)]}$$

Appliquons (49)

$$P_0 = \left[\frac{1-P_0}{\delta}\right] \xi_0 + \eta_0 P_0$$

$$P_1 = \left[\frac{1-P_0}{\delta}\right] [\xi_1 - \xi_0] + \eta_0 P_1 + \eta_1 P_0$$

Soit

$$(1-\eta_0)P_1 = P_0 \left[\eta_1 + (1-\eta_0)\frac{\xi_1-\xi_0}{\xi_0}\right]$$

$$= P_0 \frac{\eta_1 \nu_0 + (1-\eta_0)\left[1-\nu_0-\nu_0\frac{\eta_1}{1-\eta_0}\right]}{\nu_0}$$

$$= P_0 (1-\eta_0)\frac{1-\nu_0}{\nu_0}$$

Soit

$$\boxed{P_1 = P_0 [\eta_0^{-\delta} - 1]} \qquad (61)$$

$$P_1 = P_0 \frac{1-\nu_0}{\nu_0}$$

$$\boxed{P_2 = 1 - \frac{P_0}{\nu_0}} \qquad (62)$$

$$P_1 = \frac{1-\nu_0}{\nu_0 + \delta[(1-\eta_0)+\nu_0(1-\eta_0-\eta_1)]}$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{\nu_0 + \delta[1-\eta_0+\nu_0(1-\eta_0-\eta_1)]}$$

* On vérifie que

$$\nu_0 + \delta[1-\eta_0+\nu_0+\nu_0[1-\eta_0-\eta_1]] > 1$$

en effet $\quad \nu_0+\delta[1-\eta_0+\nu_0[1-\eta_0-\eta_1]] > \nu_0+\delta(1-\eta_0)$

$$\nu_0+\delta[1-\eta_0] = \eta_0^{\delta}+\delta(1-\eta_0) = X(\eta_0)$$

$$\eta_0 = 0 \quad X(0) = \delta < 1$$

$$\eta_0 = 1 \quad X(0) = 1$$

$$X'(\eta_0) = \delta[\eta_0^{\delta-1}-1] < 0 \text{ pour } \eta_0 < 1 \text{ c q f d.}$$

donc : $\quad P_2 = P_0 \left[\delta\left(\frac{1-\eta_0}{\xi_0}\right) - (\eta_0^{-\delta}-1)\right]$

D. Calcul de $\gamma(u)$

On peut écrire, si on pose

$$P(u)\ \eta\ (u) = \ell(u)$$

$$\gamma(u) = [\ell_0 + \ell_1 + \ell_2] + \ell_3\ u + \ell_4\ u^2 + \ldots + \ell_{s+2}\ u^s$$

$$\ell(u) = \eta_0\ P_0 + u\ [\eta_1\ P_0 + \eta_0\ P_1] + u^2\ [\eta_2\ P_0 + \eta_1\ P_1 + \eta_0\ P_2]$$
$$+ u^k\ [\eta_k\ P_0 + \eta_{k-1}\ P_1 + \eta_{k-2}\ P_2] + \ldots$$

$$\gamma_0 = \eta_0 + \eta_1\ [P_0 + P_1] + \eta_2\ P_0$$

$$\gamma_0 = \eta_0 + \eta_1\ \eta_0^{-\delta}\ P_0 + \eta_2\ P_0$$

$$\gamma_1 = \eta_3\ P_0 + \eta_2\ P_0(\eta_0^{-\delta} - 1) + \eta_1\ [1 - \eta_0^{-\delta}\ P_0]$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_k = \eta_k(1 - \eta_0^{-\delta}\ P_0) + \eta_{k+1}\ P_0(\eta_0^{-\delta} - 1) + \eta_{k+2}\ P_0 \\ \qquad k = 1, \ldots\ldots\ s-2 \end{array}\right\} \qquad (63)$$

$$\gamma_{s-1} = \eta_{s-1}(1 - \eta_0^{-\delta}\ P_0) + \eta_s\ P_0(\eta_0^{-\delta} - 1)$$

$$\gamma_s = \eta_s(1 - \eta_0^{-\delta}\ P_0)$$

VI.6. Résolution du système complet

Soit $A(u)$ la caractéristique de $X(t)$
$\Theta(u)$ la caractéristique de $Y(t)$
$\varphi(u)$ la caractéristique de $L(t)$
$\alpha(u)$ la caractéristique de $N(t)$

(4) s'écrit : $\boxed{\alpha(u) = \Pi_s\ [A(u)\ \Theta(u)\ \varphi(u)]}$ (64)

(5) s'écrit : $\boxed{\varphi(u) = 1 + u^{-s}\ \mathcal{L}_s\ [A(u)\ \Theta(u)\ \varphi(u)]}$ (65)

(65) peut encore s'écrire en utilisant (64) :

$$A(u)\ O(u)\ \varphi(u) = \alpha(u) + u^s\ [\varphi(u) - 1] \qquad (66)$$

a) Calcul de $A(u)$

Pour les jonctions entrantes , on peut appliquer les résultats obtenus pour les jonctions sortantes en considérant que la capacité est infinie et que *les arrivées sont poissonniennes de paramètre* a.
Il faut donc remplacer $\eta(u)$ par $e^{a(u-1)}$. $X(t)$ est la somme de n variables $X_j(t)$ indépendantes, la loi de $X_j(t)$ étant donnée par (42)

On peut calculer immédiatement les termes

$$Pr\ [X_j(t) = 1] = E\ [X_j(t)],$$

en écrivant que à cause de la stationnarité :

$$E\ [X_J(t)] = E\ [R_j(t)] = a$$

La caractéristique de $X_J(t)$ est donc :

$$A(u) = [1 + a(u-1)]^n \qquad (67)$$

b) Calcul de P_0:

$$\sum_{J=1}^{n} E\ [S_J(t)] = n\ E\ [S_J(t)]$$

Le trafic sortant étant égal au trafic entrant $X(t)$

$$n\ E\ [S_J(t)] = E\ [X(t)] = n\ E\ [X_J(t)] = n\ a$$

$$E\ [S_J(t)] = a \qquad (68)$$

Rappelons que a est l'espérance du trafic entrant dans l'une des jonctions entrantes.

On a supposé $a < \frac{1}{\delta}$

De (42) on déduit donc P_0 :

$$\frac{1-P_0}{\delta} = a \qquad \boxed{P_0 = 1 - \delta\, a} \qquad (69)$$

c) Remarque sur les relations entre α et η, et Θ et γ.

(3') s'écrit $\boxed{\eta(u) = \alpha(1+\frac{1}{n}(u-1))}$ (70)

Ceci peut s'écrire encore : pour $v \in [1-\frac{1}{n}, 1]$

$$\alpha(v) = \eta\,[1+n(v-1))]$$

Le même raisonnement peut être fait pour Θ et γ

$$\boxed{\gamma(u) = \Theta(1+\frac{1}{n}(u-1))} \qquad (71)$$

ou $\Theta(v) = \gamma(1+n\,(v-1))$ pour $v \in [1-\frac{1}{n}, 1]$

d) Résolution approximative en supposant que $\eta(u)$ est de degré 1

Etant donné que n est grand devant s, et qu'il y a au plus s paquets qui se présentent en un instant devant les n liaisons, il n'est pas ridicule de supposer que $\eta_2\ \eta_3$ ... seront petits. Nous allons donc chercher une solution approximative en supposant :

$$\eta(u) = \eta_0 + \eta_1\, u$$

$$= \eta_0 + (1-\eta_0)\, u$$

Ceci entraine $\mu(u) = \nu(u)$

Par suite $(1-\eta_0)\ X(u) = \dfrac{\nu(u)\ \ \eta_1\ \ (1-u)}{\eta_1\ (\nu(u)-u)}$

$$X(u) = \frac{(1-u)\ \ \nu(u)}{\nu(u)-u}$$

$$\xi_i = \frac{X_i}{X_0 + \ldots . X_n}$$

D'autre part dans ce cas particulier :

$$T(u) = X(u)$$

ξ_i est donc proportionnel à P_i

$$\forall\, i \cdot r \qquad \xi_i = \frac{P_i}{1-P_{r+1}} \tag{72}$$

Dans le cas où $r = 1$, on trouve :

$$\xi_0 = \nu_0 = \eta_0^{\delta}$$

$$P_0 = \frac{\eta_0^{\delta}}{\eta_0^{\delta}+\delta(1-\eta_0)}$$

$$(1-P_2)\,\eta_0^{\delta} = \frac{\eta_0^{\delta}}{\eta_0^{\delta}+\delta(1-\eta_0)}$$

$$1-P_2 = \frac{1}{\eta_0^{\delta} + \delta(1-\eta_0)}$$

Calculons $\gamma(u)$:

$P(u)$ étant de degré $r+1$, si $\eta(u)$ est de degré 1

Si $P(u)\,\eta(u) = \ell(u)$

$\ell(u)$ est de degré $r+2$

D'après (51)

$$\gamma(u) = (\ell_0 + \ldots \ell_{r+1}) + u\,\ell_{r+2}$$

$$\ell_0 = P_0\,\eta_0$$

$$\ell_1 = P_1\,\eta_0 + P_0\,\eta_1$$

$$\vdots$$

$$\ell_{r+1} = P_{r+1}\,\eta_0 + P_r\,\eta_1$$

$$\ell_{r+2} = P_{r+1}\,\eta_1$$

La somme des $r+2$ premières lignes vaut :

$$\eta_0 + \eta_1 (1 - P_{r+1}) = 1 - \eta_1 P_{r+1}$$

$$\gamma(u) = 1 - \eta_1 P_{r+1} + \eta_1 P_{r+1} u$$

$$\boxed{\gamma(u) = 1 + \eta_1 P_{r+1} (u-1)} \qquad (73)$$

Si nous supposons qu'il n'y a pas plus d'une entrée dans la même jonction sortante, ceci signifie sur si $N(t) = j$ les j arrivées dans les jonctions sortantes sont indépendantes. Pour chacune il y a une probabilité d'être détournée,et une autre probabilité d'être acceptée.

$$Pr\ (Y_J(t) = 1 \ / \ N_J(t) = 1) = \frac{Pr(Y_J(t) = 1 \text{ et } N_J(t) = 1)}{Pr(N_J(t) = 1)}$$

$$= \frac{Pr(Y_J(t) = 1)}{Pr(N_J(t) = 1)} = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \quad \text{car} \quad Pr\,[N_J(t) = 0 \text{ et } Y_J(t) = 1] = 0$$

$$Pr\ (Y_J(t) = 0 \ / \ N_J(t) = 1) = 1 - \frac{\gamma_1}{\eta_1}$$

On en déduit :

$$Pr\ (Y(t) = i \ / \ N(t) = j) = C_j^i \left(\frac{\gamma_1}{\eta_1}\right)^i \left(1 - \frac{\gamma_1}{\eta_1}\right)^{j-i}$$

$$\theta_i = Pr\ (Y(t) = i) = \sum_{j=i}^{s} \alpha_j C_j^i \left(\frac{\gamma_1}{\eta_1}\right)^i \left(1 - \frac{\gamma_1}{\eta_1}\right)^{j-i}$$

Donc $\theta(u) = \sum_{i=0}^{s} \theta_i u^i = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \left(\frac{\gamma_1 u}{\eta_1}\right)^i \left(1 - \frac{\gamma_1}{\eta_1}\right)^{j-i}$

$$\boxed{\theta(u) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \left[1 + \frac{\gamma_1}{\eta_1} (u-1)\right]^j} \qquad (74)$$

(73) donne la valeur de γ_1 :

$$\theta(u) = \sum_{0}^{s} \alpha_j \left[1 + P_{r+1}(u-1)\right]^j \qquad (75)$$

En posant $v = 1 + P_{r+1}(u-1)$

On obtient $u = 1 + \frac{1}{P_{r+1}} (v-1)$

$$\alpha(v) = \Sigma\, \theta_j \left[1 + \frac{1}{P_{r+1}} (v-1)\right] \qquad (76)$$

Il faut résoudre le système formé par les équations (64), (66) et (75).

(59) et (75) donnent :

$$\boxed{A(u)\ \alpha\ [1+P_{r+1}(u-1)]\ \varphi(u) = \alpha(u) + u^{s}\ [\varphi(u)-1]} \qquad (77)$$

Soit $A_0\ \alpha(1-P_{r+1})\ \varphi_0 = \alpha_0$

$$A_0 = (1-\alpha)^n$$

$$\alpha(1-P_{r+1}) = \frac{\alpha_0}{\varphi_0 (1-\alpha)^n}$$

Dérivons la relation (77)

$$A'(u)\ \alpha(1+P_{r+1}(u-1))\ \varphi(u) + A(u)\ P_{r+1}\ \alpha'(1+P_{r+1}(u-1)\ \varphi(u)$$

$$+ A(u)\ \alpha(1+P_{r+1}(u-1)\ \varphi'(u)) = \alpha'(u) + u^{s}\ \varphi'(u) + s\ u^{s-1}(\varphi(u)-1)$$

Pour $u = 1$ on trouve :

$$A'(1) + \alpha'(1)\ P_{r+1} + \varphi'(1) = \alpha'(1) + \varphi'(1)$$

$$\alpha'(1)\ [1-P_{r+1}] = A'(1) = n\ a$$

$$<\alpha> = \frac{n\ a}{[1-P_{r+1}]} \qquad (78)$$

Remarque :

$[A(u)\ \Theta(u) - u^{s}]\ \varphi(u) = \alpha(u) - u^{s}$ n'admet comme racine réelle que $u = 1$ pour $|u| < 1$, puisque $\alpha(u) = \Sigma\ \alpha_i\ u^i < \Sigma\ \alpha_i\ u^s = u^s$

Il en est de même pour $A\ \Theta - u^{s} = 0$

De (78) on déduit $\eta_1 = <\eta> = \frac{a}{1-P_{r+1}}$ (79)

Or $<\gamma> = \gamma_1 = <\eta> - a \Rightarrow \gamma_1 = \frac{P_{r+1}\ a}{1-P_{r+1}}$ (80)

Cas particulier $n=1$

$$P_1 = (\eta_0^{-\delta} - 1)\ P_0$$

$$P_1 + P_0 = \eta_0^{-\delta}\ P_0$$

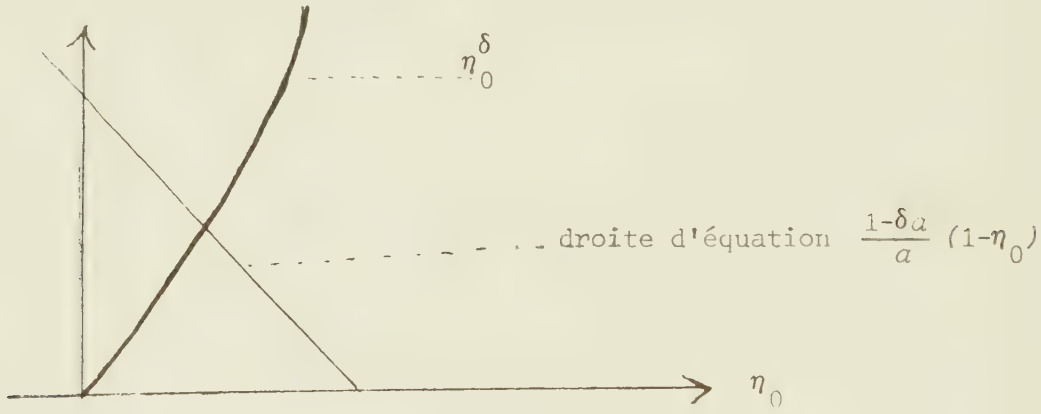
$$1 - P_2 = \eta_0^{-\delta}\ P_0$$

On a donc :

$$1 - \eta_0 = \frac{a\ \eta_0^{\delta}}{1 - \delta\ a} \qquad (81)$$

Cette équation permet de trouver η_0 .

On peut faire une résolution graphique.



On peut aussi faire une résolution itérative en commençant par $\eta_0^{(0)} = 1-a$

Quand on a obtenu η_0 on tire :

$$P_0 = 1 - \delta\ a$$

$$P_1 = (\eta_0^{-\delta} - 1)\ P_0$$

$$P_2 = 1 - \eta_0^{-\delta}\ P_0 = 1 - \frac{a}{\eta_1}$$

$$\langle \eta \rangle = \eta_1 = 1 - \eta_0$$

$$\langle \alpha \rangle = n\ \eta_1$$

$$\langle 0 \rangle = n\ \langle \gamma \rangle = n(\eta_1 - a)$$

e) Calcul de $\alpha(u)$ par itération en partant de la solution correspondant à $s = \infty$, pour $\eta_0 + \eta_1 = 1$

$$A(u)\ \alpha\ [1+ P_{r+1}(u-1)]\ \varphi(u) = \alpha(u) + u^s\ [\varphi(u)-1]$$

Faisons tendre s vers l'∞ : $\varphi^{\infty}(u) = 1$

$$A(u)\ \alpha^{\infty}\ \{1+ P_{r+1}(u-1)\} = \alpha^{\infty}(u)$$

En égalant les coefficients on tire $\alpha^{\infty}(u)$. On peut admettre que $A(u) \simeq e^{n\ a(u-1)}$.

On vérifie immédiatement alors que :

$\alpha^{\infty}(u) = e^{n\ \eta_1 (u-1)}$ est solution.

On peut en tirer :

$$\Pi_s\ [A\ \Theta^{\infty}] = \alpha^{(1)} = \Pi_s\ (\alpha^{\infty})$$

$$u_s\ [1- \varphi^{(1)}] = (1- \Pi_s)\ [\alpha^{\infty}]$$

$$\alpha^{(1)} = e^{-n\ \eta_1} \left[1+n\ \eta_1\ u + \ldots. + \frac{(n\ \eta_1)^{s-1} u^{s-1}}{(s-1)!} + u^s \left\{ \frac{(n\ \eta_1)^s}{s!} + \ldots. + \frac{(n\ \eta_1)^{s+k}}{(s+k)!} + \ldots \right\} \right]$$

On calcule alors

$$\Theta^{(1)} = \alpha^{(1)}\ (1+ P_{r+1}(u-1))$$

Puis

$$\alpha^{(2)} = \Pi_s\ [A\ \Theta^{(1)}\ \varphi^{(1)}]$$

$$u^s(1-\varphi^{(2)}) = 1- \Pi_s\ [A\ \Theta^{(1)}\ \varphi^{(1)}]$$

$$\Theta^{(2)} = \alpha^{(2)}\ (1+ P_{r+1}(u-1))$$

- - - - - - - - - - - - - - -

$$\alpha^{(i)} = \Pi_s\ [A\ \Theta^{(i-1)}\ \varphi^{(i-1)}]$$

$$u^s\ [1-\varphi^{(i)}] = 1- \Pi_s\ [A\ \Theta^{(i-1)}\ \varphi^{(i-1)}]$$

```
CCC1              INTEGER DEBMES,T,TT,TFIN,DELTA,TMIN,TMAX,Y
CCC2              INTEGER E(500,20),ENT(500,14),NE(20),NENT(14)
CCC3              INTEGER TENT(4000),L(4000),IENT(4000),IS(4000)
CCC4              INTEGER NS(14),TSO(14),TS(14),IFS(6),IFE(6)
CCC5              INTEGER PERMU(6),OCLIA(6),TA1(14),TA0(14)
CCC6              INTEGER IA(6),IB(20),TEMS(5,14),TEML(7),TTOT(5)
CCC7              INTEGER TEMPS(10,20),TTOTE(10),TTOTI(10),IND(20)
CCC8              DIMENSION  P(10,20),PE(10),PI(10),POCUP(6)
CCC9              DIMENSION PS(5,14),PST(5),PL(7),PA0(14),PA1(14)
CC10              IPRINT=6
CC11              IREAD=5
CC12              READ(IREAD,9000) TMIN,TMAX,IALEA,DELTA,INT,IDEB,ICAP
CC13           9000 FORMAT(8I10)
CC14              WRITE(IPRINT,610) ICAP
CC15           610  FORMAT(' CAPACITE DES FILES DE SORTIES EN ',
                  2'COMPTANT AUSSI CELUI QU ON SERT=',I10)
CC16              WRITE(IPRINT,611) TMIN
CC17           611  FORMAT(' DUREE DE GENERATION DES MESSAGES ',
                  2'POUR L INITIALISATION=',I10)
CC18              WRITE(IPRINT,612) TMAX
CC19           612  FORMAT(' TEMPS DE FIN DE SIMULATION=',I10)
CC20              WRITE(IPRINT,613) IALEA
CC21           613  FORMAT(' INITIALISATION DES NOMBRES PSEUDO',
                  2'-ALEA=',I10)
CC22              WRITE(IPRINT,614) DELTA
CC23           614  FORMAT(' INTERVALLE ENTRE 2 MOTS D UN MEME ',
                  2'MESSAGE=',I10)
CC24              WRITE(IPRINT,615) INT
CC25           615  FORMAT(' INTERVALLE ENTRE 2 IMPRESSIONS DE ',
                  2'RESULTATS=',I10)
CC26              WRITE(IPRINT,616) IDEB
CC27           616  FORMAT(' INTERVALLE MOYEN ENTRE DEUX DEBUTS ',
                  2'DE MESSAGES=',I10)
                  C
                  C GENERATION DES MESSAGES DEBUTANT AVANT TMIN
                  C
CC28              T=0
CC29              NMES=0
CC30              DEBMES=1
CC31              DO 1 T=1,TMIN
CC32              IF(DEBMES.NE.T) GO TO 1
CC33              NMES=NMES+1
CC34              CALL ALEA(X,IALEA)
CC35              L(NMES)= -ALOG(X)*4000+1
CC36              TENT(NMES)=T
CC37              CALL ALEA(X,IALEA)
CC38              Y=-ALOG(X)*IDEB+1
CC39              DEBMES=Y+DEBMES
```

```
CC4C          1     CCNTINUE
CC41                WRITE(IPRINT,617) NMES
CC42          617   FORMAT(' NOMBRE DE MESSAGES CENSES PENDANT ',
                   2'L INITIALISATION=',I1C)
              C
              C ELIMINATION DES MESSAGES TERMINES AVANT TMIN.
              C
CC43                I=C
CC44          14    I=I+1
CC45          13    IF(I.GT.NMES) GO TO 1C
CC46                TFIN=TENT(I)+DELTA*(L(I)-1)
CC47                IF(TFIN.GT.T)GOTO 14
CC48                II=I+1
CC49                IF(I.EQ.NMES)GOTO 113
CC5C                DO 11 J=II,NMES
CC51                ITA=TENT(J)
CC52                TENT(J-1)=ITA
CC53                ITA=L(J)
CC54          11    L(J-1)=ITA
CC55          113   NMES=NMES-1
CC56                GOTO 13
CC57          1C    CONTINUE
              C
              C NUMERO DU PREMIER PAQUET DE CHAQUE MESSAGE
              C QUI ENTRE A TMIN OU APRES. JONCTIONS ENTRANTES ET
              C JONCTIONS SORTANTES AUXQUELLES LE MESSAGE EST DESTINE
              C
CC58                DO 12 I=1,NMES
CC59                IC=(TMIN-TENT(I))/DELTA+1
CC6C                TENT(I)=TENT(I)+DELTA*IC
CC61          12    L(I)=L(I)-IC
CC62                DO 19 I=1,NMES
CC63                CALL ALEA(X,IALEA)
CC64                IENT(I)=X*14+1
CC65                CALL ALEA(X,IALEA)
CC66          19    IS(I)=X*14+1
              C
              C INITIALISATIONS
              C
CC67                DO 15 I=1,14
CC68                ISC(I)=C
CC69                IAC(I)=C
CC7C                IA1(I)=C
CC71                NENT(I)=C
CC72                NS(I)=C
CC73          15    IS(I)=C
CC74                DO 16 I=1,2C
CC75          16    NE(I)=C
```

```
0076                  DO 17 I=1,6
0077                  OCLIA(I)=0
0078             17   IFS(I)=0
0079                  WRITE(IPRINT,618) NMES
0080             618  FORMAT(' NOMBRE DE MESSAGES NON TERMINES A ',
                     2'LA FIN DE L INITIALISATION=',I10)
0081                  DO 9001 I=1,10
0082                  DO 9002 J=1,20
0083             9002 TEMPS(I,J)=0
0084                  TTOTE(I)=0
0085             9001 TTOTI(I)=0
0086                  DO 9003 I=1,5
0087                  DO 9004 J=1,14
0088             9004 TEMS(I,J)=0
0089             9003 TTOT(I)=0
0090                  DO 9005 I=1,7
0091             9005 TEML(I)=0
                C
                C LA BOUCLE DO 1000 REPRESENTE LES OPERATIONS A T
                C
                C
0092                  DO 1000 T=TMIN,TMAX
                C *************************
                C TEST DEBUT DE MESSAGE
                C
0093                  IF(DEBMES.NE.T)GOTO 1100
0094                  NMES=NMES+1
0095                  CALL ALEA(X,IALEA)
0096                  L(NMES)=-ALOG(X)*4000+1
0097                  CALL ALEA (X,IALEA)
0098                  IENT(NMES)=X*14+1
0099                  CALL ALEA(X,IALEA)
0100                  IS(NMES)=X*14+1
0101                  TENT(NMES)=T
0102                  CALL ALEA(X,IALEA)
0103                  Y=-ALOG(X)*IDEB+1
0104                  DEBMES=DEBMES+Y
                C
                C RECHERCHE DES ENTREES
                C
0105             1100 DO 2000 I=1,NMES
0106                  IF(TENT(I).NE.T)GOTO 2000
0107                  L(I)=L(I)-1
0108                  TENT(I)=TENT(I)+DELTA
0109                  IIENT=IENT(I)
0110                  NENT(IIENT)=NENT(IIENT)+1
0111                  NI=NENT(IIENT)
0112                  IF(NI.EQ.1) TSO(IIENT)=T+4
```

```
113                ENT(NI,IIENT)=IS(I)
114              2000 CONTINUE
                C
                C TEST POUR ELIMINER LES MESSAGES TERMINES
                C
115                I=0
116              20    I=I+1
117              21    IF(I.GT.NMES)GOTO 22
118                    IF(L(I).NE.0)GOTO 20
119                    II=I+1
120                    IF(I.EQ.NMES)GOTO 24
121                    DO 23 J=II,NMES
122                    ITA=IENT(J)
123                    IENT(J-1)=ITA
124                    ITA=IENT(J)
125                    IENT(J-1)=ITA
126                    ITA=IS(J)
127                    IS(J-1)=ITA
128                    ITA=L(J)
129              23    L(J-1)=ITA
130              24    NMES=NMES-1
131                    GOTO 21
132              22    CONTINUE
                C
                C FINS DE SERVICE DES JONCTIONS ENTRANTES.SORTIES
                C DES FILES D ENTREES.ENTREES DANS LES MEMOIRES
                C TAMPON D ENTREE
                C
133                    DO 2001 K=1,14
134                    IF(T.NE.TSO(K)) GO TO 2003
135                    NE(K)=NE(K)+1
136                    TA1(K)=TA1(K)+1
137                    NI=NE(K)
138                    NJ=ENT(1,K)
139                    E(NI,K)=NJ
140                    NENT(K)=NENT(K)-1
141                    NN=NENT(K)
142                     IF(NN.EQ.0) GOTO 2001
143                     TSO(K)=T+4
144                    DO 2002 J=1,NN
145                    IJ=ENT(J+1,K)
146              2002  ENT(J,K)=IJ
147                    GO TO 2001
148              2003  TAO(K)=TAO(K)+1
149              2001  CONTINUE
                C
                C SORTIES DES LIAISONS DE SELECTION.
                C
```

```
C15C                  IM=T-(T/6)*6+1
C151                  IMM=6
C152                  DO 131 J=1,2
C153                  IF(J.EQ.1) GO TO 132
C154                  IF(IM.EQ.1) GO TO 131
C155                  IMM=IM-1
C156                  IM=1
C157            132   DO 13C I=IM,IMM
C158                  KS=IFS(I)
C159                  IF(KS.EQ.C)GOTO 13C
C16C                  IF(NS(KS)-ICAP)14C,15C,15C
C161            14C   NS(KS)=NS(KS)+1
C162                  IF(NS(KS).EQ.1)TS(KS)=T+4
C163                  GOTO 13C
C164            15C   NE(I+14)=NE(I+14)+1
C165                   NI=NE(I+14)
C166                  E(NI,I+14)=KS
C167            13C   CONTINUE
C168            131   CONTINUE
                C
                C NC EST LE NOMBRE DE MEMOIRES TAMPON D'ENTREES
                C ET INTERMEDIAIRES QUI SONT OCCUPEES.IND(I) EST
                C LE NUMERO DE LA IIEME DE CES MEMOIRES OCCUPEES.
                C NJ=INF(NC,6)
                C
C169                  NC=C
C17C                  DO 4C I=1,2C
C171                  IF (NE(I).EQ.C) GOTO 4C
C172            41     NC=NC+1
C173                  IND(NC)=I
C174            4C    CONTINUE
C175                  IF(NC.EQ.C) GO TO 5C1
C176                  NJ=MINO(NC,6)
C177                  IT=NJ+1
C178                  TEMP(IT)=TEMP(IT)+1
                C
                C TIRAGE ALEATOIRE DE NJ NOMBRES PARMI LES NC
                C PREMIERS. ON LES DESIGNE PAR IA(I).
                C
C179                  NE=NC
C18C                  DO 5C I=1,NC
C181                   IE(I)=I
C182            5C    CONTINUE
C183                  DO  51  I=1,NJ
C184                  CALL ALEA(X,IALEA)
C185                  IX=X*NE+1
C186                  IA(I)=IE(IX)
C187                  NE=NE-1
```

```
                DO 52 J=1,NE
                IF (J.LT.IX) GO TO 52
                IE(J)=IE(J+1)
 52             CONTINUE
 51             CONTINUE
C
C TIRAGE DE LA LIAISON PERMU(I),C.A.D.ELIMINATION
C ALEATOIRE DES 6-NJ LIAISONS QUI SERONT VIDES.
C
                DO 60 I=1,6
 60             PERMU(I)=I
                NK=6-NJ
                IF(NK.EQ.0) GO TO 62
                NE=6
                DO 61 I=1,NK
                CALL ALEA(X,IALEA)
                IX=X*NE+1
                NE=NE-1
                IF(NE.LT.IX) GO TO 61
                DO 62 J=IX,NE
 62             PERMU(J)=PERMU(J+1)
 61             CONTINUE
 63             DO 64 I=1,NJ
                IJ=PERMU(I)
 64             COLIA(IJ)=COLIA(IJ)+1
C
C IFE(I) EST L INDICE DE LA FILE DU PAQUET
C ENTRANT DANS LA LIAISON I.
C
                DO 110 I=1,6
                IFE(I)=0
 110            IFS(I)=0
C
C MODIFICATION DES NJ FILES
C
                DO 70 I=1,NJ
                K=IA(I)
                M=PERMU(I)
 70             IFE(M)=IND(K)
                DO 111 I=1,6
                IFILE=IFE(I)
                IF(IFE(I).EQ.0)GO TO 111
                NE(IFILE)=NE(IFILE)-1
                NN=NE(IFILE)
                IFS(I)=E(1,IFILE)
C
C E(1,IFE(I))EST LE NUMERO DE LA FILE DE SORTIE
C POUR LE PAQUET QUI EST DANS LA LIAISON I.
```

```
      C
C242          IF(NN.EQ.0) GOTO 111
C243          DO 120 J=1,NN
C244          IJ=E(J+1,IFILE)
C245   120    E(J,IFILE)=IJ
C246   111    CONTINUE
      C
      C TEMPS(10,20):TABLEAU DES TEMPS PENDANT
      C LESQUELS IL Y A 0,1,...9,(9 OU PLUS) PAQUETS
      C DANS CHAQUE MEMOIRE TAMPON D'ENT. OU INT.
      C TTOTE (10) TOTALISE CE TEMPS POUR LES 14 FILES D'ENTREE
      C TTOTI(10)LES TOTALISE POUR LES 6 FILES INT.
      C TEMS(9,14): TABLEAU DES TEMPS PENDANT LESQUELS
      C IL Y A 0,1,2,3,4 PAQUETS DANS LES MEMOIRES DE
      C SORTIE.TTOT(9) TOTALISE CES TEMPS.
      C TEMU(I):TEMPS PENDANT LEQUEL I+1 LIAISONS SONT
      C OCCUPEES.
      C P(10,20),PE(10),PI(10),PS(9,14),PST(9),ET
      C PU(7) SONT RESPECTIVEMENT LES ESTIMATIONS
      C DES PROBABILITES CORRESPONDANTES.
      C PAO(I):ESTIMATION DE LA PROBABILITE POUR QU'IL
      C N'Y AIT PAS D'ENTREE DANS LA MEMOIRE TAMPON
      C D' ENTREE NUMERO I
      C PAI(I): ESTIMATION DE LA PROBA POUR QU'IL Y AIT
      C UNE ENTREE DANS LA MEMOIRE TAMPON D'ENTREE I
      C
C247          DO 900 I=1,14
C248          IT=NE(I)+1
C249          IF(IT.GE.10) IT=10
C250          TEMPS(IT,I)=TEMPS(IT,I)+1
C251          TTOTE(IT)=TTOTE(IT)+1
C252   500    CONTINUE
C253          DO 901 I=15,20
C254          IT=NE(I)+1
C255          IF(IT.GE.10) IT=10
C256          TEMPS(IT,I)=TEMPS(IT,I)+1
C257          TTOTI(IT)=TTOTI(IT)+1
C258   901    CONTINUE
C259          GO TO 900
C260   901    TTOTE(1)=TTOTE(1)+14
C261          TTOTI(1)=TTOTI(1)+6
C262          TEMU(1)=TEMU(1)+1
C263          DO 902 I=1,20
C264   902    TEMPS(1,I)=TEMPS(1,I)+1
      C
      C SORTIES DES JONCTIONS SORTANTES.
      C
C265   900    DO 30 K=1,14
```

```
246             IF(T.NE.TS(K)) GO TO 31
247             NS(K)=NS(K)-1
248             IF(NS(K).GT.0) TS(K)=T+4
249          31 IT=NS(K)+1
250             TEMS(IT,K)=TEMS(IT,K)+1
251             TTCT(IT)=TTCT(IT)+1
252          30 CONTINUE
             C
             C  INT EST L INTERVALLE SEPARANT DEUX IMPRESSIONS DE RESULTATS
             C
253             IF(INT*((T-TMIN)/INT)-(T-TMIN).NE.0)GOTO 1000
254             ATT=T-TMIN+1
255             TT=T-TMIN
256             IF(TT.EQ.0) GO TO 1000
257             DO 600 I=1,10
258             DO 601 J=1,20
259          601 P(I,J)=FLOAT(TEMPS(I,J))/ATT
260             PE(I)=FLOAT(TTOTE(I))/ATT
261             PE(I)=PE(I)/14.
262             PI(I)=FLOAT(TTOTI(I))/ATT
263          600 PI(I)=PI(I)/6.
264             DO 602 I=1,6
265          602 PCOUP(I)=FLOAT(COUIA(I))/ATT
266             DO 603 I=1,7
267          603 PL(I)=FLOAT(TEML(I))/ATT
268             II=ICAP+1
269             DO 605 I=1,II
270             DO 604 J=1,14
271          604 PS(I,J)=FLOAT(TEMS(I,J))/ATT
272             PST(I)=FLOAT(TTOT(I))/ATT
273          605 PST(I)=PST(I)/14.
274             DO 606 I=1,14
275             PAC(I)=FLOAT(TAC(I))/ATT
276          606 PAI(I)=FLOAT(TAI(I))/ATT
277             WRITE(IPRINT,700)TT,(PE(I),I=1,10),(PI(I),I=1,10)
278          700 FORMAT(1H1//3H T=,I10///' MEMOIRES TAMPON D ENT',
                2'TREES ET INTERMEDIAIRES'//' PROBA(LONGUEUR ',
                3'DE LA FILE = I)'//12X,2HI=,12X,1HO,9X,1H1,
                49X,1H2,9X,1H3,9X,1H4,9X,1H5,9X,1H6,9X,1H7,9X,
                51H8,5X,5HS DE PLUS//22H MOY ARITHM 14 P ENT=,
                610P10.5//22H MOY ARITHM 6 P INTM=,10P10.5)
279             DO 800 I=1,20
280          800 WRITE(IPRINT,801)I,(P(J,I),J=1,10)
281          801 FORMAT(/5H FILE,I3,14X,10P10.5)
282             WRITE(IPRINT,802) (PAC(I),I=1,14),(PAI(I),I=1,14)
283          802 FORMAT(//' PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE ',
                2'DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE'//' PROBA D ENTREE',
                37F8.5/15X,7F8.5//' PROBA I ENTREE',7F8.5/15X,
```

```
                  47FF.5)
C284                   WRITE(IPRINT,7C1)(PCCLP(I),I=1,6)
C285              7C1  FORMAT(1H1///' LIAISCN DE SELECTIC '/
                  2/34H PRCBA CCCLP CHACUNE DES LIAISCNS=,6F1C.5
                  3//2CX,2HI=,25X,1HC,9X,1H1,9X,1H2,9X,1H3,9X,
                  41H4,9X,1H5,9X,1H6)
C286                   WRITE(IPRINT,7C2)(PL(I),I=1,7)
C287              702  FORMAT(//' PRCBA(NCMBRE DE LIAISCNS CCCUPEES',
                  2' = I) =',7F1C.5,15(/),' JCNCTICNS SCRTANTES',
                  3//' PRCBA(LCNGUEUR DE LA FILE = I)'//26X,1HC,
                  49X,1H1,9X,1H2,9X,1H3,9X,1H4,9X,1H5)
C288                   DC 8C3 I=1,14
C289              8C3  WRITE(IPRINT,8C1)I,(PS(J,I),J=1,II)
C29C                   WRITE(IPRINT,8C4)(PST(J),J=1,II)
C291              8C4  FORMAT(//' MCY ARITHM 14 PRCBA=',5F1C.5)
C292              1CCC CCNTINUE
C293                   STCP
C294                   END
```

```
CCC1                   SUBRCUTINE ALEA(E,IY)
CCC2                   IY=IY*65539
CCC3                   IF(IY)1,2,2
CCC4              1    IY=IY+2147483647+1
CCC5              2    E=FLCAT(IY)/2147483647
CCC6                   RETURN
CCC7                   END
```

SERIE A

I= 10000

CAPACITE DES FILES DE SORTIES EN COMPTANT AUSSI CELUI QU ON SERT= 2
DUREE DE GENERATION DES MESSAGES POUR L INITIALISATION= 1000000
TEMPS DE FIN DE SIMULATION= 1010000
INITIALISATION DES NOMBRES PSEUDO-ALEA 13
INTERVALLE ENTRE 2 MOTS D UN MEME MESSAGE= 130
INTERVALLE ENTRE 2 IMPRESSIONS DE RESULTATS= 10000
INTERVALLE MOYEN ENTRE DEUX DEBUTS DE MESSAGES= 2400
NOMBRE DE MESSAGES CENERES PENDANT L INITIALISATION= 404
NOMBRE DE MESSAGES NON TERMINES A LA FIN DE L INITIALISATION= 169

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 OU PLUS
MOY ARITHM 14 P ENT=,	0.99931	0.00069	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 P INTM=,	0.99718	0.00282	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 1	0.99930	0.00070	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.99890	0.00110	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.99780	0.00220	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.99900	0.00100	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.99960	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.99890	0.00110	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.99830	0.00170	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.99850	0.00150	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.99670	0.00330	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 16	0.99730	0.00270	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.99630	0.00370	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.99780	0.00220	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.99720	0.00280	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.99790	0.00220	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA D ENTREE 0.91531 0.90531 0.91381 0.84622 0.93071 0.90771 0.92291
0.90941 0.85411 0.92341 0.90771 0.85111 0.93081 0.93861

PROBA 1 ENTREE 0.08469 0.09469 0.08619 0.15378 0.06929 0.09229 0.07709
0.09059 0.14589 0.07659 0.09229 0.10885 0.06919 0.06139

} estimation de a

LIAISONS DE SELECTION

PROBA OCCUP CHACUNE DES LIAISONS= 0.41166 0.40776 0.41056 0.42086 0.41396 0.40936

I= 0 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS OCCUPEES = I) = 0.12365 0.20198 0.21018 0.20438 0.12279 0.07459 0.06239

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	0.56994	0.36126	0.06879
FILE 2	0.34537	0.45825	0.19638
FILE 3	0.50785	0.32967	0.16248
FILE 4	0.57414	0.37536	0.05049
FILE 5	0.65143	0.30297	0.04460
FILE 6	0.60084	0.23078	0.16838
FILE 7	0.67363	0.21688	0.10949
FILE 8	0.59964	0.26947	0.13089
FILE 9	0.32477	0.24638	0.42886
FILE 10	0.64004	0.31007	0.04990
FILE 11	0.69243	0.25367	0.05389
FILE 12	0.63634	0.16098	0.20268
FILE 13	0.47675	0.29897	0.22438
FILE 14	0.64684	0.33857	0.01460

MOY ARITHM 14 PROBA= 0.56714 0.29673 0.13613

I= [illegible]

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES [illegible]

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 OU PLUS
MOY ARITHM 14 F ENT=,	0.99948	0.00052	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 F INTM=,	0.99793	0.00207	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 1	0.99956	0.00044	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	[illegible]	[illegible]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.99942	0.00058	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	[illegible]	[illegible]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.99970	0.00030	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.99884	0.00116	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.99940	0.00060	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.99912	0.00088	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.99917	0.00083	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.99891	0.00109	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.99923	0.00077	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.99999	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.99787	0.00213	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 16	0.99786	0.00214	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.99796	0.00204	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.99816	0.00184	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.99776	0.00224	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.99796	0.00204	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA 0 ENTREE 0.90170 0.90274 0.91020 0.86007 0.92197 0.90174 0.92215
0.90017 0.85285 0.92553 0.91522 0.89747 0.91624 0.93694

PROBA 1 ENTREE 0.09830 0.09726 0.08980 0.13993 0.07803 0.09828 0.07785
0.09983 0.14711 0.07447 0.08478 0.10253 0.08376 0.06306 } estimation de a

LIAISONS DE SELECTION

PROBA OCCUP CHACUNE DES LIAISONS= 0.40642 0.40998 0.40857 0.41015 0.40700 0.40441

I=	0	1	2	3	4	5	6
PROBA(NOMBRE DE LIAISONS OCCUPEES = I) =	0.08646	0.22769	0.23728	0.19103	0.15619	0.06173	0.03963
	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	0.59996	0.33933	0.06211
FILE 2	0.37353	0.40585	0.22063
FILE 3	0.61324	0.31523	0.07153
FILE 4	0.56316	0.36353	0.07331
FILE 5	0.65280	0.28434	0.06286
FILE 6	0.66684	0.23093	0.10223
FILE 7	0.59502	0.24220	0.16278
FILE 8	0.55168	0.28495	0.16337
FILE 9	0.47977	0.29048	0.22976
FILE 10	0.52647	0.36193	0.11170
FILE 11	0.72250	0.24793	0.02917
FILE 12	0.64684	0.19473	0.15843
FILE 13	0.45585	0.32341	0.22095
FILE 14	0.61313	0.33746	0.04941

MOY ARITHM 14 PROBA= 0.57576 0.30151 0.12273

T= 00000

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILITE(LOI) DE LA FILE = 1)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 OU PLUS
MOY ARITHM 14 P ENT=,	0.99936	0.00064	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 P INTM=,	0.99797	0.00203	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 1	0.99948	0.00052	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	0.99968	0.00032	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.99956	0.00044	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.99924	0.00076	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.99966	0.00034	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.99907	0.00093	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.99940	0.00059	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.99937	0.00062	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.99950	0.00050	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.99928	0.00072	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.99920	0.00080	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.99912	0.00088	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.99906	0.00094	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.99939	0.00061	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.99789	0.00211	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 16	0.99796	0.00203	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.99801	0.00199	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.99801	0.00198	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.99802	0.00198	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.99793	0.00206	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA D ENTREE 0.93867 0.05289 0.00411 0.00151 0.01032 0.00716 0.00216
0.00681 0.04294 0.00221 0.00551 0.01019 0.00427 0.00175

PROBA I ENTREE 0.10133 0.10711 0.05589 0.14845 0.06066 0.12835 0.07834
0.09219 0.15706 0.09779 0.09449 0.06581 0.12573 0.09825

} estimation de α

LIAISONS DE SELECTION

PROBA CHOIX CHACUNE DES LIAISONS= 0.44075 0.44075 0.44022 0.44066 0.43953 0.43976

I= 0 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS OCCUPEES = I) = 0.06502 0.18184 0.25094 0.22449 0.15263 0.07653 0.04854

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	0.52941	0.37027	0.10032
FILE 2	0.50294	0.32902	0.16803
FILE 3	0.48961	0.36964	0.14075
FILE 4	0.65085	0.30423	0.04493
FILE 5	0.59364	0.31877	0.08759
FILE 6	0.56403	0.34333	0.09265
FILE 7	0.57030	0.28006	0.14964
FILE 8	0.45996	0.34088	0.19917
FILE 9	0.49122	0.32590	0.18288
FILE 10	0.59922	0.30878	0.09201
FILE 11	0.56111	0.33303	0.10586
FILE 12	0.52166	0.28491	0.19344
FILE 13	0.50833	0.36087	0.13079
FILE 14	0.50286	0.33524	0.16190

MOY ARITHM 14 PROBA= 0.53465 0.32885 0.13650

SERIE B

T= 10000

CAPACITE DES FILES DE SORTIES EN COMPTANT AUSSI CELLE OU CA SERT= 4
DUREE DE GENERATION DES MESSAGES POUR L INITIALISATION= 1000000
TEMPS DE FIN DE SIMULATION= 11000000
INITIALISATION DES NOMBRES PSEUDO-ALEA= 13
INTERVALLE ENTRE 2 ACTS D UN MEME MESSAGE= 120
INTERVALLE ENTRE 2 IMPRESSIONS DE RESULTATS= 10000
INTERVALLE MOYEN ENTRE DEUX DEBUTS DE MESSAGES= 1333
NOMBRE DE MESSAGES GENERES PENDANT L INITIALISATION= 728
NOMBRE DE MESSAGES NON TERMINES A LA FIN DE L INITIALISATION= 315

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILITES DE LA FILE = 1)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ET PLUS
MOY ARITHM 14 F ENT=,	0.95252	0.04712	0.00036	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 F INTM=,	0.75054	0.16686	0.05676	0.01750	0.00573	0.00178	0.00045	0.00002	0.0	0.0
FILE 1	0.95360	0.04600	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	0.93511	0.06079	0.00010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.94181	0.05779	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.95830	0.04160	0.00010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.96300	0.03700	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.94041	0.05919	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.94171	0.05719	0.00110	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.97930	0.02070	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.94751	0.05209	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.93521	0.06389	0.00090	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.96130	0.03800	0.00070	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.96060	0.03870	0.00070	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.93561	0.06385	0.00050	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.97210	0.02650	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.75322	0.16108	0.06129	0.02610	0.00510	0.00200	0.00110	0.00010	0.0	0.0
FILE 16	0.73613	0.16258	0.06199	0.02660	0.00270	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.74783	0.16168	0.05659	0.02170	0.00850	0.00270	0.00060	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.74683	0.16768	0.05509	0.02110	0.00740	0.00150	0.00040	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.76052	0.16178	0.05319	0.02040	0.00450	0.00300	0.00020	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.75832	0.16558	0.05249	0.02010	0.00560	0.00130	0.00040	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA D ENTREE 0.82312 0.75042 0.77002 0.82812 0.64252 0.79132 0.85051
0.89241 0.83702 0.80012 0.66521 0.64372 0.80152 0.88631

PROBA 1 ENTREE 0.17688 0.24958 0.22998 0.17188 0.15708 0.20868 0.14948
0.10759 0.16298 0.19988 0.13079 0.15628 0.19048 0.11369

} estimation de α

LAISONS DE SELECTION

PROBA CUMUL CHACUNE DES LIAISONS= C.5C611 C.5C151 C.5C521 C.5C651 C.5C131 C.5[illegible]

I= C 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS CUMULEES = I) = C.CCC5C C.CC24C C.C2CCC C.C5255 C.C5165 C.1[illegible] [illegible]

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

CACTICNS SORTANTES

PROBA(LOCALELR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
ILE 1	C.2E1C7	C.4E845	C.25C47
ILE 2	C.1515E	C.3525E	C.414CE
FILE 3	C.2C42E	C.44EEE	C.347C7
FILE 4	C.1E3EE	C.4E265	C.33347
FILE 5	C.3548E	C.33787	C.3C727
FILE 6	C.33CE7	C.4212E	C.2478E
FILE 7	C.25EC7	C.3E4CE	C.31787
FILE 8	C.22118	C.433EE	C.34497
FILE 9	C.3C9C7	C.3532E	C.25727
FILE 1C	C.32557	C.43756	C.23EC8
FILE 11	C.3755E	C.33207	C.28EC7
FILE 12	C.5C375	C.3525E	C.14325
FILE 13	C.478C5	C.35C8E	C.1315C5
FILE 14	C.28577	C.37276	C.33747

PCY ARITEP 14 FACEA= C.31C5C C.4C365 C.28545

T= 70000

PERCIRES TAMPON E ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILITES DE LA FILE = 11

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PCV ARITHM E ENT=,	0.55111	0.04660	0.00028	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
PCV ARITHM S INT=,	0.73275	0.17666	0.05552	0.01565	0.00626	0.00190	0.00056	0.00011	0.00001	0.0
FILE 1	0.55050	0.04693	0.00017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	0.53307	0.06646	0.00047	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.53744	0.06217	0.00035	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.54580	0.05380	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.55486	0.04497	0.00017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.54654	0.05312	0.00033	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.54524	0.05456	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.56821	0.03172	0.00006	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.54350	0.05564	0.00026	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.54126	0.05837	0.00037	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.56485	0.03482	0.00025	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.56011	0.03947	0.00041	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.54417	0.05538	0.00044	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.97517	0.02481	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.74046	0.17620	0.05727	0.01835	0.00514	0.00169	0.00064	0.00015	0.00002	0.0
FILE 16	0.72875	0.18312	0.06231	0.01515	0.00561	0.00055	0.00003	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.73075	0.17817	0.06061	0.01575	0.00723	0.00261	0.00057	0.00012	0.0	0.0
FILE 18	0.72725	0.17514	0.06228	0.02166	0.00677	0.00191	0.00065	0.00021	0.00006	0.0
FILE 19	0.73242	0.17823	0.05503	0.02056	0.00677	0.00235	0.00053	0.00013	0.0	0.0
FILE 20	0.73670	0.17643	0.05606	0.01866	0.00604	0.00167	0.00043	0.00009	0.0	0.0

PROCESSUS E ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON E ENTREE

PROBA E ENTREE 0.82693 0.75006 0.76283 0.82136 0.82782 0.80516 0.84405
0.86520 0.82226 0.80423 0.86657 0.85067 0.80423 0.85962

PROBA I ENTREE 0.17307 0.24954 0.23717 0.17864 0.16218 0.15484 0.15591
0.11480 0.17774 0.15577 0.13343 0.14533 0.15567 0.10138

} estimation α

LIAISONS DE SELECTION

PROBA (OCCUP CHACUNE DES LIAISONS= C.91834 C.91713 C.91802 C.91879 C.91673 C.91487

I= 0 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS OCCUPEES = I) = C.00019 C.00294 C.01713 C.04429 C.07830 C.12218 C.17951

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(CONCLUE DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	C.23904	C.44277	C.31820
FILE 2	C.26147	C.39365	C.34488
FILE 3	C.20858	C.46519	C.32627
FILE 4	C.13877	C.44972	C.41151
FILE 5	C.35544	C.34114	C.30342
FILE 6	C.34857	C.43079	C.22024
FILE 7	C.27855	C.37671	C.34474
FILE 8	C.20850	C.42281	C.36829
FILE 9	C.29411	C.44362	C.26227
FILE 10	C.33570	C.42158	C.24273
FILE 11	C.38417	C.31702	C.29881
FILE 12	C.48549	C.35808	C.15643
FILE 13	C.46205	C.41121	C.12674
FILE 14	C.21841	C.39752	C.28407

PCY ARITHM 14 PROBA= C.30855 C.40513 C.28632

SERIE C

T=	10000

CAPACITE DES FILES DE SORTIES EN COMPTANT AUSSI CELUI QU ON SERT=	2
DUREE DE GENERATION DES MESSAGES POUR L INITIALISATION=	1000000
TEMPS DE FIN DE SIMULATION=	1100000
INITIALISATION DES NOMBRES PSEUDO-ALEA=	13
INTERVALLE ENTRE 2 MOTS D UN MEME MESSAGE=	130
INTERVALLE ENTRE 2 IMPRESSIONS DE RESULTATS=	10000
INTERVALLE MOYEN ENTRE DEUX DEBUTS DE MESSAGES=	1200
NOMBRE DE MESSAGES GENERES PENDANT L INITIALISATION=	820
NOMBRE DE MESSAGES NON TERMINES A LA FIN DE L INITIALISATION=	355

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ET PLUS
MOY ARITHM 14 M ENT=,	0.82845	0.16117	0.00956	0.00080	0.00003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 M INTM=,	0.16617	0.13337	0.10704	0.08544	0.06934	0.05991	0.05194	0.04048	0.03820	0.24811
FILE 1	0.82862	0.16058	0.01040	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	0.79562	0.18548	0.00580	0.00100	0.00010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.81212	0.17848	0.00850	0.00090	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.83312	0.15498	0.01110	0.00080	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.78642	0.19758	0.01440	0.00150	0.00010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.80742	0.18048	0.01170	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.83072	0.15418	0.01340	0.00170	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.87861	0.11729	0.00410	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.84722	0.14039	0.01130	0.00110	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.80122	0.18888	0.00970	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.85041	0.13959	0.00800	0.00180	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.82352	0.17158	0.00490	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.82252	0.16658	0.01090	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.87671	0.11629	0.00560	0.00140	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.12959	0.11049	0.10159	0.08679	0.06169	0.06969	0.06699	0.05439	0.05149	0.26721
FILE 16	0.17558	0.15138	0.12669	0.09209	0.08819	0.07479	0.05839	0.03770	[illegible]	[illegible]
FILE 17	0.21648	0.16578	0.14519	0.11009	0.08159	0.05859	0.04950	0.03860	0.02970	0.09960
FILE 18	0.12159	0.09139	0.07269	0.05999	0.04110	0.04100	0.04010	0.03520	0.04040	0.45655
FILE 19	0.18698	0.15558	0.11449	0.10779	0.09419	0.07049	0.05579	0.03880	0.03710	[illegible]
FILE 20	0.16678	0.12159	0.08159	0.05589	0.04990	0.04450	0.04090	0.03820	0.03440	0.35728

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA 0 ENTREE 0.81322 0.75382 0.78482 0.81272 0.75412 0.76982 0.82452
0.85981 0.81542 0.77302 0.84622 0.78502 0.80702 0.87651

PROBA 1 ENTREE 0.18678 0.24618 0.21518 0.18728 0.24588 0.23018 0.17548
0.14019 0.18458 0.22698 0.15378 0.21498 0.19298 0.12349 } estimation α

LIAISONS DE SELECTION

PROBA CCCUP CHACUNE DES LIAISONS= C.9978C C.9965C C.9974C C.9979C C.9972C C.9972C

I= C 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS CCCUPEES = I) = C.CCC5C C.CCC4C C.CCC4C C.CCCPC C.CC11C C.C24PC C.9926

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	C.C796S	C.51295	C.4C72E
FILE 2	C.C786S	C.5CEC5	C.4132E
FILE 3	C.CC25C	C.27277	C.72473
FILE 4	C.16728	C.51355	C.31917
FILE 5	C.17128	C.57664	C.252C7
FILE 6	C.28447	C.47665	C.23EEE
FILE 7	C.2C128	C.49C85	C.3C7E7
FILE 8	C.25287	C.5CC55	C.2C65E
FILE 9	C.26327	C.51315	C.22256
FILE 1C	0.10739	C.52285	C.36576
FILE 11	C.45175	C.365CE	C.14315
FILE 12	C.38476	C.45215	C.163CE
FILE 13	C.22718	C.43286	C.33557
FILE 14	C.28576	C.44266	C.1715E

MCY ARITHM 14 PROBA= C.22416 C.47CC5 C.2C575

T= 60000

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILITES DE LA FILE = I)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MOY ARITHM 14 F ENT=,	0.79648	0.18736	0.01454	0.00145	0.00012	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 F INT=,	0.04538	0.03572	0.03483	0.03018	0.02743	0.02522	0.02499	0.02356	0.02233	0.01947
FILE 1	0.79759	0.18275	0.01425	0.00267	0.00025	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	0.75710	0.22268	0.01855	0.00153	0.00013	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.78335	0.20016	0.01440	0.00155	0.00013	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.80449	0.18045	0.01305	0.00175	0.00027	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.74585	0.22693	0.01910	0.00203	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.77037	0.21170	0.01612	0.00165	0.00017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.80157	0.18165	0.01533	0.00142	0.00003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.85542	0.13843	0.00903	0.00012	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.81214	0.17145	0.01483	0.00138	0.00019	0.00002	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.74475	0.23278	0.02057	0.00185	0.00005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.84200	0.14743	0.00938	0.00108	0.00010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.78769	0.19603	0.01452	0.00160	0.00017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.79517	0.18736	0.01300	0.00047	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.84479	0.14128	0.01237	0.00140	0.00017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.05455	0.04553	0.04857	0.04358	0.03750	0.03777	0.03757	0.03767	0.03675	0.03505
FILE 16	0.02242	0.02812	0.02470	0.01860	0.01780	0.01593	0.01342	0.01013	0.00943	0.00945
FILE 17	0.06858	0.06008	0.05285	0.04485	0.04045	0.03407	0.03457	0.03250	0.03120	0.02878
FILE 18	0.02247	0.01958	0.01703	0.01453	0.01057	0.01207	0.01210	0.01130	0.01112	0.00902
FILE 19	0.05912	0.05352	0.04340	0.04160	0.04252	0.03795	0.03723	0.03692	0.03478	0.03407
FILE 20	0.02373	0.02710	0.02203	0.01752	0.01495	0.01355	0.01443	0.01403	0.01368	0.01257

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA D ENTREE 0.81382 0.75210 0.75115 0.81249 0.75065 0.77542 0.80720
0.85984 0.80550 0.75820 0.85542 0.77444 0.80632 0.86614

PROBA 1 ENTREE 0.18618 0.24790 0.20881 0.18751 0.24931 0.22458 0.15180
0.14016 0.19450 0.24180 0.14458 0.22556 0.19368 0.13386 } estimation a

LIAISCNS CE SELECTICN

PRCBA CCCUP CHACUNE CES LIAISCNS=	C.SSSE3	C.SSS42	C.SSSS7	C.SSS62	C.SS33[illegible]	C.S3SS3	
I=	C	1	2	3	4	5	6
PRCBA(NCMBRE CE LIAISCNS CCCUPEES = I) =	C.CCCCE	C.CCCC7	C.CCCC7	C.CCC13	C.CCC18	.C.EE	C.[illegible]E
	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6

JCNCTICNS SCRTANTES

PRCBA(LCNGUEUR CE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	C.C8745	C.5CE16	C.4CE3S
FILE 2	C.C8148	C.4S71S	C.42133
FILE 3	C.CCC42	C.2726C	C.72ESS
FILE 4	C.15CC1	C.51261	C.33738
FILE 5	C.CE432	C.4S6SE	C.41871
FILE 6	C.28536	C.4S5EE	C.21876
FILE 7	C.21275	C.5CEE1	C.28C45
FILE 8	C.2SC21	C.48163	C.22816
FILE 9	C.24731	C.521C1	C.23166
FILE 1C	C.1363C	C.526S1	C.33675
FILE 11	C.46531	C.4C2S4	C.13175
FILE 12	C.35521	C.46S3S	C.1754C
FILE 13	C.24255	C.481CE	C.27638
FILE 14	C.38754	C.43546	C.173CC

SERIE D

I= 10000

CAPACITE DES FILES DE SORTIES EN COMPTANT AUSSI CELLE DE LA SERI= 3
DUREE DE GENERATION DES MESSAGES POUR L INITIALISATION= 100000
TEMPS DE FIN DE SIMULATION= 1100000
INITIALISATION DES NOMBRES PSEUDO-ALEA= 12
INTERVALLE ENTRE 2 ACTS E LA MEME MESSAGE= 120
INTERVALLE ENTRE 2 IMPRESSIONS DE RESULTATS= 10000
INTERVALLE MOYEN ENTRE DEUX CREUTS DE MESSAGES= 2400
NOMBRE DE MESSAGES GENERES PENDANT L INITIALISATION= 404
NOMBRE DE MESSAGES NON TERMINES A LA FIN DE L INITIALISATION= 165

NOMBRES TAMPON E ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILITE DE LA FILE = 11

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NOY ARITHM 14 F ENT=	0.55562	0.00018	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
NOY ARITHM 6 F INT=	0.55605	0.00005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 1	0.55550	0.00010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.55560	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.55570	0.00030	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.55540	0.00060	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.55570	0.00030	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.55560	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.55560	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.55890	0.00110	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 16	0.55960	0.00040	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.55880	0.00120	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.55910	0.00090	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.55910	0.00090	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.55FE0	0.00120	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS E ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON E ENTREE

PROBA 0 ENTREE 0.50531 0.50431 0.50751 0.E4622 0.52551 0.50771 0.53091
0.51541 0.85411 0.51771 0.50771 0.85121 0.53061 0.53F61

PROBA 1 ENTREE 0.05469 0.09565 0.05209 0.15378 0.07445 0.05225 0.06909
0.0E459 0.14565 0.0E225 0.05225 0.1CE75 0.06515 0.06139

} estimation α

LIAISONS DE SELECTION

PROBA CUMUL CHACUNE DES LIAISONS= C.33567 C.34807 C.34817 C.34817 C.34957 C.34957

I= 0 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS CUMULEES = I) = C.16758 C.20498 C.27587 C.19628 C.07419 C.05125 C.04584

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2	P_3
FILE 1	C.52835	C.34027	C.11579	C.01560
FILE 2	C.25857	C.34197	C.26137	C.13805
FILE 3	C.48505	C.30267	C.16358	C.04830
FILE 4	C.55694	C.39766	C.04540	C.C
FILE 5	C.64544	C.31467	C.03550	C.C
FILE 6	C.60404	C.19028	C.12755	C.07805
FILE 7	C.65083	C.15178	C.12875	C.06855
FILE 8	C.55804	C.23828	C.12125	C.08235
FILE 9	C.32437	C.18078	C.25157	C.24328
FILE 10	C.63204	C.20317	C.09775	C.00700
FILE 11	C.66523	C.26257	C.07175	C.C
FILE 12	C.58394	C.10005	C.12075	C.19518
FILE 13	C.44236	C.18548	C.19228	C.17588
FILE 14	C.64284	C.32517	C.03200	C.C

MOY ARITH 14 PROBA= C.54125 C.25966 C.12355 C.07546

I= 100000

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILITES DE LA FILE = 1)

I=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ET PLUS
MOY ARITHM 14 F ENT=,	0.55555	0.00005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 F INTM=,	0.55570	0.00030	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 1	0.55563	0.00017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.55557	0.00003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.55555	0.00005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.55557	0.00003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.55552	0.00008	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.55565	0.00011	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.55558	0.00002	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.55567	0.00013	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.55555	0.00005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.55553	0.00007	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	1.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.55557	0.00043	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 16	0.55569	0.00011	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.55563	0.00037	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.55565	0.00031	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.55563	0.00037	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.55560	0.00020	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA D ENTREE 0.85562 0.90613 0.90488 0.85511 0.92132 0.91556 0.93681
0.90862 0.85542 0.90578 0.91583 0.88853 0.92575 0.92508

PROBA 1 ENTREE 0.10438 0.09387 0.09512 0.14089 0.07888 0.08444 0.06315
0.09138 0.14058 0.09422 0.08017 0.11147 0.07425 0.07092

} estimation de α

LIAISONS DE SELECTION

PROBA POUR CHACUNE DES LIAISONS= C.30083 C.30297 C.30055 C.30503 C.30563 C.30103

I= C 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS OCCUPEES = I) = C.15939 C.29450 C.27470 C.15631 C.08005 [illegible]

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2	P_3
FILE 1	C.51680	C.25658	C.13760	C.04862
FILE 2	C.27708	C.33531	C.26231	C.12531
FILE 3	C.56940	C.25797	C.12555	C.04664
FILE 4	C.55268	C.39153	C.05575	C.C
FILE 5	C.64831	C.28405	C.05541	C.00815
FILE 6	C.59633	C.25302	C.10727	C.04338
FILE 7	C.61520	C.18230	C.16126	C.03724
FILE 8	C.50324	C.20525	C.15557	C.13554
FILE 9	C.38885	C.18313	C.21857	C.20542
FILE 10	C.62036	C.26838	C.08560	C.02166
FILE 11	C.61721	C.30604	C.07675	C.C
FILE 12	C.65028	C.16732	C.12567	C.05673
FILE 13	C.45701	C.24058	C.18264	C.11538
FILE 14	C.63368	C.32466	C.04166	C.C

PCY ARITHM 14 PROBA= C.54646 C.26407 C.12858 C.06085

VI.8 Analyse des résultats

Nous présentons d'abord 4 séries de résultats correspondant à différentes valeurs des capacités des files de sortie $(n+1)$, et de 1 intervalle moyen entre 2 débuts de message.

Série A $d = 2400$, $n+1 = 2$
Série B $d = 1333$, $n+1 = 2$
Série C $c = 1200$, $n+1 = 2$
Série D $d = 2400$, $n+1 = 3$

Les valeurs de d correspondent respectivement à des valeurs du nombre moyen a de paquets par unité de temps de :

$$d = 2400 \Rightarrow a = 0.119$$
$$d = 1333 \Rightarrow a = 0.214$$
$$d = 1200 \Rightarrow a = 0.238$$

Les taux de trafic correspondant pour les jonctions entrantes sont donc respectivement :

0.476 0.857 ou 0.952.

Le système devra, lorsqu'il sera réalisé, être utilisé avec une grande sécurité ; on veut prévoir un nombre de jonctions entrantes ou de liaisons tel que le système soit peu chargé. On veut en effet que si quelques liaisons tombent en panne le système puisse fonctionner. C'est donc surtout la première série qui correspond à un taux pratiquement utilisé.

Cependant, les hypothèses que nous avons faites pour la résolution théorique sont surtout valables dans le cas ou le système est peu chargé. Nous avons fait des simulations correspondant aussi à des systèmes très chargés dans le but de valider les hypothèses théoriques faites. En effet si on peut voir une bonne concordance entre la théorie simplifiée et la simulation, même dans le cas où l'hypothèse simplificatrice s'applique le moins bien, on aura validé cette hypothèse.

Discutons la stationnarité :

Pour l'établissement de la stationnarité, ce qui pose un problème, ce n'est pas la circulation des paquets dans le noeud, mais c'est la génération des messages. Le problème vient du fait que la durée d'un message qui est de l'ordre de $\mu A = 5.2\ 10^5$ est très grande par rapport aux autres durées. Nous avons donc généré des messages pendant une très longue durée d'initialisation (10^6), sans faire entrer de paquet dans le système, dans le seul but de générer un flux de paquets stationnaire. On pourrait penser de prime abord qu'il faut être ridiculement pointilleux pour faire tourner à vide une simulation pour laquelle les temps de service sont 1 ou 4 pendant une durée de 10^6 afin d'obtenir un flux stationnaire. Ce n'est pas le cas ou contraire cette durée est en fait indispensable pour que le taux moyen d'entrée soit à peu près celui que nous souhaitions.

Après cette initialisation *le flux offert est à peu près stationnaire*, le nombre de mots d'un message étant très grand, *mais son taux moyen varie lentement, en fonction des valeurs trouvées pour le tirage des débuts de message. Le tirage des débuts de message est le plus important et se fait à des intervalles si éloignés que pour avoir une simulation correspondant à un taux moyen d'entrée proche du taux désiré il faudrait faire une moyenne sur un intervalle très long.*

Pour $d = 2400$, pour un coefficient de confiance de 95%, on trouve un intervalle relatif de confiance de :

100% pour $T = 10^4$
31% pour $T = 10^5$
10% pour $T = 10^6$

Le taux moyen d'arrivée varie lentement. Si on pouvait faire durer la simulation très longtemps le taux moyen global serait bien celui que nous souhaitions. Pour la série A nous avons d'ailleurs fait une simulation beaucoup plus longue et ceci se vérifie partiellement. Comme des simulations très longues coûtent trop cher, nous ne ferons qu'une simulation assez courte, nous mesurerons le taux moyen d'entrée et nous comparerons les résultats théoriques avec les résultats de la simulation en considérant que le taux moyen d'entrée est le taux évalué par simulation, que nous appellerons a_{est}.

Pour de petites valeurs de T : $(T < 10^5)$

Série A et D	a_{est}	= 0,09
Série B	a_{est}	= 0,17
Série C	a_{est}	= 0,195

L'ordre de grandeur de la durée de la simulation est le suivant : sur IBM 370, pour un programme demandant 5 mn, outre une période d'initialisation simulée de 10^6 unités de temps, le temps de simulation n'atteint que :

Série A	10^5
Série B	7.10^4
Série C	6.10^4

Calcul de P_0

La théorie démontre que s'il y a stationnarité :

$$P_0 = 1 - \delta\ a$$

Nous appellons $P_{0,cal}$ la valeur de P_0 obtenue par cette formule et $P_{0,est}$ la valeur de P_0 estimée par simulation

Série A :

$T = 10^4$	$a_{est} = 0.093$	$P_{0,cal} = 0.627$	$P_{0,est} = 0.567$
$T = 10^5$	$a_{est} = 0.0953$	$P_{0,cal} = 0.619$	$P_{0,est} = 0.575$
$T = 10^6$	$a_{est} = 0.1069$	$P_{0,cal} = 0.572$	$P_{0,est} = 0.535$

Série D :

$T = 10^4$	$a_{est} = 0.094$	$P_{0,cal} = 0.624$	$P_{0,est} = 0,541$
$T = 10^5$	$a_{est} = 0.094$	$P_{0,cal} = 0.623$	$P_{0,est} = 0.546$

Série B :

$T = 10^4$	$a_{est} = 0.172$	$P_{0,cal} = 0.310$	$P_{0,est} = 0.310$
$T = 7.10^4$	$a_{est} = 0.173$	$P_{0,cal} = 0.308$	$P_{0,est} = 0.308$

Série C :

$T = 10^4$	$a_{est} = 0.194$	$P_{0,cal} = 0.178$	$P_{0,est} = 0.224$
T =	$a_{est} = 0.198$	$P_{0,cal} = 0.208$	$P_{0,est} = 0.216$

Considérons l'hypothèse : "$\eta(u)$ est de degré 1"

Nous avons alors obtenu l'équation :

(81) $$1-\eta_0 = \frac{a\,\eta_0^{\delta}}{1-\delta\,a}$$

Deux autres équations obtenues sans cette hypothèse sont :

(69) $$P_0 = 1-\delta\,a$$

(61) $$P_1 = P_0(\eta_0^{-\delta}-1)$$

Nous allons vérifier l'exactitude de ce système par simulation en 3 étapes.

1) Estimation directe par simulation de a obtenue en comptabilisant les entrées.
2) Estimation de a obtenue à partir de l'équation (69) et de l'estimation par simulation de P_0
3) Estimation de η_0 obtenue à partir de l'équation (61) et de l'estimation par simulation de P_0 et de P_1. Puis estimation de a par l'équation (81).

Résultats numériques

Série A $\quad T = 10^4$

1) $a = 0.0933$

2) $P_0 = 0.567 \Rightarrow a = 0.108$

3) $\eta_0 = 0.900 \Rightarrow a = 0.088$

Série A $\quad T = 10^5$

1) $a = 0.0953$

2) $P_0 = 0.576 \Rightarrow a = 0.106$

3) $\eta_0 = 0.900 \Rightarrow a = 0.088$

Série A $T = 8 \cdot 10^5$

1) $a = 0.1069$

2) $P_0 = 0.535 \Rightarrow a = 0.116$

3) $\eta_0 = 0.887 \Rightarrow a = 0.098$

Série B $T = 10^4$

1) $a = 0.1724$

2) $P_0 = 0.3109 \Rightarrow a = 0.1723$

3) $\eta_0 = 0.812 \Rightarrow a = 0.1344$

Série B $T = 7. 10^4$

1) $a = 0.1728$

2) $P_0 = 0.30855 \Rightarrow a = 0.1728$

3) $\eta_0 = 0.811 \Rightarrow a = 0.1348$

Série C $T = 10^4$

1) $a = 0.195$

2) $P_0 = 0.2164 \Rightarrow a = 0.194$

3) $\eta_0 = 0.754 \Rightarrow a = 0.188$

Série C $T = 6 \cdot 10^4$

1) $a = 0.198$

2) $P_0 = 0.22416 \Rightarrow a = 0.196$

3) $\eta_0 = 0.749 \Rightarrow a = 0.191$

Après cette première analyse des résultats, il apparaît qu'une meilleure vérification des hypothèses théoriques pourrait être faite soit en faisant une simulation très longue afin d'avoir vraiment des estimateurs convergents, soit en simplifiant le modèle des arrivées.

Simulation simplifiée : (Série E). Considérons donc le cas d'une simulation où les arrivées sont poissonniennes et de paramètre a. Le calcul de a doit tenir compte de la discrétisation.

Calcul de l'erreur faite sur le taux moyen d'entrée à cause de la discrétisation.

Considérons des arrivées aux instants TENT de loi exponentielle de taux B. Lorsque les temps d'entrée sont écrits en entiers on a le choix entre les formules :

```
TENT = TENT - B * ALOG (X)
```

et

```
TENT = TENT - B * ALOG (X) + 1
```

X est une variable de répartition uniforme sur [0,1] (voir ch.V annexe 1) (On discrétise en prenant la partie entière ou la partie entière plus un).

Calculons dans le premier cas la valeur C de l'espérance de l'intervalle entre deux arrivées :
On choisit un intervalle entier n pour :

$$n \leq - B \, Log \, X < n+1$$

Donc on choisit n avec une probabilité :

$$e^{-\frac{n}{B}} - e^{-\frac{n+1}{B}}$$

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{-\frac{n}{B}} - \sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{-\frac{n+1}{B}}$$

Posons $u = e^{-\frac{1}{B}}$

$$C = u(1-u) \sum_{n=0}^{\infty} n\, u^{n-1} = \frac{u}{1-u}$$

$$C = \frac{e^{-\frac{1}{B}}}{1-e^{-\frac{1}{B}}}$$

alors que sans discrétisation on aurait :

$$C = B$$

Dans le deuxième cas : Soit D l'espérance de l'intervalle entre deux débuts de message : $D = C + 1$ on obtient donc :

$$D = \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{B}}} \qquad \text{au lieu de} \quad D = B$$

Conclusion : Pour de petites valeurs de B l'erreur due à la discrétisation est très grande. Pour de grandes valeurs de B on trouve :

$$D \sim B + \frac{1}{2}$$

$$C \sim B - \frac{1}{2}$$

Résultats numériques :

La simulation effectuée correspondait à $B = 8$

Résultats théoriques :	Résulats obtenus par simulation :
$a = 0{,}1175$	$a = 0{,}117$
$P_0 = 0{,}53$	$P_0 = 0{,}505$
$\eta_0 = 0{,}87$	$\eta_0 = 0{,}88$
$P_1 = 0{,}395$	$P_1 = 0{,}338$

Ces résultats permettent de penser que les hypothèses théoriques faites sont assez bonnes.

T= 100000

SERIE E

MEMOIRES TAMPON D ENTREES ET INTERMEDIAIRES

PROBABILENGUEUR DE LA FILE = I)

I=		1	2	3	4	5	6	7	8	9 OU PLUS
MOY ARITHM 14 P ENT=,	0.99789	0.00211	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOY ARITHM 6 P INTM=,	0.98970	0.00956	0.00066	0.00007	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 1	0.99793	0.00207	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 2	0.99786	0.00213	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 3	0.99804	0.00196	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 4	0.99772	0.00228	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 5	0.99801	0.00199	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 6	0.99760	0.00240	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 7	0.99781	0.00219	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 8	0.99786	0.00214	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 9	0.99779	0.00221	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 10	0.99812	0.00188	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 11	0.99782	0.00218	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 12	0.99807	0.00193	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 13	0.99778	0.00222	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 14	0.99800	0.00200	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 15	0.98999	0.00965	0.00035	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 16	0.98982	0.00943	0.00073	0.00002	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 17	0.98983	0.00940	0.00072	0.00005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 18	0.99045	0.00881	0.00058	0.00015	0.00001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 19	0.98869	0.01020	0.00091	0.00016	0.00004	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FILE 20	0.98939	0.00990	0.00068	0.00003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCESSUS D ENTREE DANS CHACUNE DES MEMOIRES TAMPON D ENTREE

PROBA O ENTREE 0.88185 0.88299 0.88194 0.88373 0.88300 0.88214 0.88223
0.88364 0.88224 0.88332 0.88073 0.88385 0.88321 0.88328

PROBA 1 ENTREE 0.11815 0.11701 0.11816 0.11627 0.11700 0.11786 0.11777) estimation de a
0.11636 0.11776 0.11668 0.11927 0.11615 0.11679 0.11672)

LIAISONS DE SELECTION

PROBA OCCUP CHACUNE DES LIAISONS= 0.51047 0.51048 0.50794 0.50972 0.50908 0.50576

I= 0 1 2 3 4 5 6

PROBA(NOMBRE DE LIAISONS OCCUPEES = I) = 0.04279 0.13957 0.21733 0.22310 0.17275 0.10784 0.09663

α_0 α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6

JONCTIONS SORTANTES

PROBA(LONGUEUR DE LA FILE = I)

	P_0	P_1	P_2
FILE 1	0.50737	0.33572	0.15691
FILE 2	0.50266	0.34154	0.15580
FILE 3	0.51130	0.33607	0.15263
FILE 4	0.49265	0.34266	0.16470
FILE 5	0.50100	0.33631	0.16269
FILE 6	0.50784	0.33808	0.15408
FILE 7	0.51020	0.33719	0.15261
FILE 8	0.49572	0.33818	0.16611
FILE 9	0.50864	0.33649	0.15487
FILE 10	0.51064	0.33651	0.15285
FILE 11	0.50360	0.33797	0.15843
FILE 12	0.49660	0.33803	0.16537
FILE 13	0.50978	0.33677	0.15345
FILE 14	0.50844	0.33705	0.15451
MOY ARITHM 14 PROBA=	0.50475	0.33775	0.15750

Conclusion :

Nous avons fait l'hypothèse que les processus d'arrivée dans toutes les parties du système étaient des processus de renouvellement. Nous avons obtenu par simulation des solutions qui permettent de penser que ces hypothèses étaient justifiées.

Nous avons aussi fait des hypothèses de discrétisation, qui ont permis en particulier d'éviter les erreurs de troncature pour la simulation mais qui ont compliqué la résolution théorique. Nous avons ainsi un exemple de discussion de la discrétisation. Nous avons d'ailleurs fait un calcul à ce sujet, qui a montré que la discrétisation pouvait dans certains cas modifier beaucoup un modèle.

Références sur les études de réseaux et les files d'attente

[126] J.R. JACKSON : *Jobshop like queuing systems*. Management Science, 10-1 (Oct 1963) p 131-142.

[127] C.D. PACK *"The output of an M/D/1 queue"*. Oper. Research 23, NO 4, (July-August 1975) pp 750-760.

[128] P.J. BURKE *"The output of a queuing system"*. Oper. Research 4, (1956) pp 699-704.

[129] AVI-ITZHAK B. *"A sequence of Service Station with Arbitrary Input and Regular Service times"* Manag. Science Vol. 11 N°5 pp. 565-571 1965.

[130] FRIEDMAN H.D. *"Réduction Methods for Tandem Queueing Systems"* Oper. Research Vol. 13 N°1 pp. 121-131 1965.

[131] RUBIN I. *"Path Delays in Communication Networks"* Appl. Math. Optimization Vol.1, N°3 1974.

[132] GAVER and SHEDLER *"Processor Utilization in Multiprogramming Systems Via Diffusion Approximations"* Oper. Research 21, N°2 pp. 569-576. 1973.

[133] KOBAYASHI H. *"Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks"* Part I. J.A.C.M. 21,2 - pp. 316-328. 1974.

[134] REISER and KOBAYASI *"Accuracy of the Diffusion Approximation for Some Queueing Systems"* IBM J. Res. Develop. 18,2. pp. 110-124. March 1974.

[135] GELENBE E *"Modèles de Systèmes Informatiques"* Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques Université Paris VI- 1973.

[136] GELENBE E *"A non-Markovian Diffusion and its Application to the Approximation of Queueing and Computer System Behavior"* Research Report 74-1 - Université de Liège - 1974.

[137] GELENBE E *"On approximate Computer System Models"* J.A.C.M. Vol. 22 N°2, April 1975.

[138] GELENBE E *"Exact and approximate solution to probabilistic models of computer system behavior - Part I and II"* Proc. International School on Modelling and Measurement of Computer CNR an Universita di Bologna - Bologne - Février 1975.

[139] J. LABETOULLE, G.PUJOLLE *"A study of queuing networks with deterministic service and applications to computer networks"*. Proc International Symposium on Computer Performance Modeling, Measurement and Evaluation. Cambridge Massachusetts - March 1976.

[140] POUZIN L. et GRANGE J.L. *"Cigale la machine de commutation de paquets"* Congrès AFCET - Novembre 1973.

[141] GELENBE E. and PUJOLLE G. *"Probabilistic models of computer systems"* Part II - Proc. International Symposium on Computer Performance Modeling, Measurement and Evaluation - Cambridge Massachusetts - March 1976.

[142] M. REISER and H. KOBAYASHI. *"On the convolution algorithm for separable queuing networks"*. Proc International Symposium on Computer Performance Modeling, Measurement and Evaluation. Cambridge Massachusetts. March 1976.

[143] B. AVI-ITZHAK and D.P. HEYMAN : *Approximate queuing models for multiprogramming computer systems*. Oper. Res. 21, (1973) p-1212-1230

[144] I. RUBIN : *Message path delays in packet-switch communication networks*. IEEE transactions on communications, vol. COM 23, n°2 (Feb 75), p. 186-192.

[145] S.S. LAVENBERG : *Stability and maximum departure rate of certain open queuing networks having finite capacity constraints*. IBM Research RJ 1625 (July 22, 1975)

[146] P.J. SCHWEITZER and A.G. KONHEIM : *Buffer overflow calculations using an infinite-capacity model*. IBM Research RC 5386 (April 28, 1975).

[147] A.G. KONHEIM and M. REISER : *"A queuing model with finite waiting room and blocking"* IBM Research Report R C 5066, Y.H. 1974.